Частное образовательное учреждение высшего образования
«Международный Институт Дизайна и Сервиса»
(ЧОУВО МИДиС)

Кафедра математики и информатики

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

ЕН.01 ЭЛЕМЕНТЫ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Специальность:
09.02.07 Информационные системы и программирование

Уровень образования обучающихся:
Основное общее образование

Вид подготовки:
Базовый

Челябинск 2022

Методические рекомендации по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики разработаны на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, утверждено приказом Министерства образования и науки РФ от 9 декабря 2016 года № 1547 и рабочей программы дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики.

Автор-составитель: Писаренко И.В.

Методические рекомендации по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики рассмотрены и одобрены на заседании кафедры педагогики и психологии, протокол № 10 от 30.05.2022 г.

Заведующий кафедрой математики и информатики Л.Ю. Овсяницкая
.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Пояснительная записка

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики и предназначены для реализации основной профессиональной образовательной программы среднего профессионального образования (далее – образовательной программы) по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Целями методических указаний по дисциплине ЕН.01 Элементы высшей математики являются:

- систематизация и закрепление полученных теоретических знаний;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- развитие познавательных способностей и активности студентов, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

В методических рекомендациих изложены рекомендации к темам, приведены примерные задания, перечень литературы, рекомендуемой для выполнения заданий.

В результате освоения дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики обучающийся должен сформировать:

Общие компетенции (ОК):

Код	Наименование общих компетенций
ОК 01	Выбирать способы решения задач профессиональной деятельности, применительно к различным контекстам
ОК 05	Планировать и реализовывать собственное профессиональное и личностное развитие.

Освоение содержания дисциплины ЕН.01 Элементы высшей математики обеспечивает достижение обучающимися следующих результатов:

***уметь*:**

- Выполнять операции над матрицами и решать системы линейных уравнений
- Решать задачи, используя уравнения прямых и кривых второго порядка на плоскости
- Применять методы дифференциального и интегрального исчисления
- Решать дифференциальные уравнения
- Пользоваться понятиями теории комплексных чисел;

знать:

- Основы математического анализа, линейной алгебры и аналитической геометрии
- Основы дифференциального и интегрального исчисления
- Основы теории комплексных чисел.

Формы и методы контроля работы студентов: выборочная/фронтальная проверка выполненных заданий; заслушивание сообщений (докладов).

Критерии оценки результатов работы студентов:

– «отлично», если работа выполнена в полном объёме с соблюдением необходимой последовательности. Обучающиеся работают полностью самостоятельно: подбирают необходимые для выполнения предлагаемых работ источники знаний, показывают необходимые для проведения практической работы теоретические знания, практические умения и навыки.

– «хорошо», если работа выполняется обучающимися в полном объёме и самостоятельно. Допускаются отклонения от необходимой последовательности выполнения, не влияющие на правильность конечного результата. Работа показывает знание обучающимися основного теоретического материала и овладение умениями, необходимыми для самостоятельного выполнения работы. Могут быть неточности и небрежность в оформлении результатов работы.

– «удовлетворительно», если работа выполняется и оформляется обучающимися при сторонней помощи. На выполнение работы затрачивается много времени (можно дать возможность доделать работу дома). Обучающиеся показывают знания теоретического материала, но испытывают затруднение при самостоятельной работе.

– «неудовлетворительно» выставляется в том случае, когда обучающиеся не подготовлены к выполнению работы. Полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью. Показывается плохое знание теоретического материала и отсутствие необходимых умений.

2. Методические рекомендации по темам

Контрольные вопросы

1. Определение комплексного числа. Формы записи комплексных чисел.
2. Геометрическое изображение комплексных чисел.
3. Числовые последовательности. Предел функции. Свойства пределов.
4. Замечательные пределы, раскрытие неопределенностей.
5. Односторонние пределы, классификация точек разрыва.
6. Определение производной
7. Производные и дифференциалы высших порядков
8. Полное исследование функции. Построение графиков.
9. Уравнение поверхности. Уравнения линии.
10. Неопределенный и определенный интеграл и его свойства.
11. Несобственные интегралы с бесконечными пределами интегрирования.
12. Вычисление определенных интегралов. Применение определенных интегралов.
13. Предел и непрерывность функции нескольких переменных
14. Частные производные. Дифференцируемость функции нескольких переменных.
15. Производные высших порядков и дифференциалы высших порядков
16. Двойные интегралы и их свойства
17. Повторные интегралы
18. Приложение двойных интегралов
19. Определение числового ряда. Свойства рядов
20. Функциональные последовательности и ряды
21. Исследование сходимости рядов
22. Общее и частное решение дифференциальных уравнений
23. Дифференциальные уравнения 2-го порядка
24. Понятие Матрицы. Действия над матрицами.
25. Обратная матрица. Ранг матрицы
26. Основные понятия системы линейных уравнений
27. Правило решения произвольной системы линейных уравнений
28. . Определение вектора. Операции над векторами, их свойства
29. Вычисление скалярного, смешанного, векторного произведения векторов
30. Уравнение прямой на плоскости
31. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой
32. Линии второго порядка на плоскости.

Тема 2.Теория пределов

Методические рекомендации

Теория пределов – это один из разделов математического анализа. Вопрос решения пределов является достаточно обширным, поскольку существуют десятки приемов решений пределов различных видов. Существуют десятки нюансов и хитростей, позволяющих решить тот или иной предел. Тем не менее, мы все-таки попробуем разобраться в основных типах пределов, которые наиболее часто встречаются на практике.

Начнем с самого понятия предела. Но сначала краткая историческая справка. Жил-был в 19 веке француз Огюстен Луи Коши, который заложил основы математического анализа и дал строгие определения, определение предела, в частности. Надо сказать, этот самый Коши снился, снится и будет сниться в кошмарных снах всем студентам физико-математических факультетов, так как доказал огромное количество теорем математического анализа, причем одна теорема отвратительнее другой. В этой связи мы не будем рассматривать строгое определение предела, а попытаемся сделать две вещи:

1. Понять, что такое предел.
2. Научиться решать основные типы пределов.

Прошу прощения за некоторую не научность объяснений, важно чтобы материал был понятен даже чайнику, что, собственно, и является задачей проекта.

Итак, что же такое предел?

А сразу пример, чего бабушку лохматить….

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$$

Любой предел состоит из трех частей:

1) Всем известного значка предела $\lim$.

2) Записи под значком предела, в данном случае $x\to 1$. Запись читается «икс стремится к единице». Чаще всего – именно x, хотя вместо «икса» на практике встречаются и другие переменные. В практических заданиях на месте единицы может находиться совершенно любое число, а также бесконечность (∞).

3) Функции под знаком предела, в данном случае $\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$.

Сама запись $\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ читается так: «предел функции $\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$ при икс стремящемся к единице».

Разберем следующий важный вопрос – а что значит выражение «икс стремится к единице»? И что вообще такое «стремится»?

Понятие предела – это понятие, если так можно сказать, динамическое. Построим последовательность: сначала $x=1{,}1$, затем $x=1{,}01$, $x=1{,}001$, …, $x=1{,}00000001$, ….

То есть выражение «икс стремится к единице» следует понимать так – «икс» последовательно принимает значения, которые бесконечно близко приближаются к единице и практически с ней совпадают.

Как решить вышерассмотренный пример? Исходя из вышесказанного, нужно просто подставить единицу в функцию, стоящую под знаком предела:

$$\lim_{x\to 1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{2\cdot 1^2-3\cdot 1-5}{1+1}=\frac{-6}{2}=-3$$

Готово.

Итак, первое правило: Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.

Мы рассмотрели простейший предел, но и такие встречаются на практике, причем, не так уж редко!

<u>Пример с бесконечностью:</u>

$$\lim_{x\to\infty}(1-x)$$

Разбираемся, что такое $x \to \infty$? Это тот случай, когда x неограниченно возрастает, то есть: сначала $x=10$, потом $x=100$, потом $x=1000$, затем $x=10000000$ и так далее до бесконечности.

А что в это время происходит с функцией $1-x$?

$1-10=-9$, $1-100=-99$, $1-1000=-999$, …

Итак: если $x \to \infty$, то функция $1-x$ стремится к минус бесконечности:

$\lim\limits_{x\to\infty}(1-x)=-\infty$

Грубо говоря, согласно нашему первому правилу, мы вместо «икса» подставляем в функцию $(1-x)$ бесконечность и получаем ответ.

<u>Еще один пример с бесконечностью:</u>

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x-3)$

Опять начинаем увеличивать x до бесконечности, и смотрим на поведение функции:

$\text{если } x=10, \text{ то } 10^2-2\cdot10-3=77$

$\text{если } x=100, \text{ то } 100^2-2\cdot100-3=9797$

$\text{если } x=1000, \text{ то } 1000^2-2\cdot1000-3=997997$

…

Вывод: при $x \to \infty$ функция x^2-2x-3 неограниченно возрастает:

$\lim\limits_{x\to\infty}(x^2-2x-3)=\infty$

<u>И еще серия примеров:</u>

Пожалуйста, попытайтесь самостоятельно мысленно проанализировать нижеследующее и запомните простейшие виды пределов:

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x-99}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-3}{x^3}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{x^4+x-9}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5}{4^x}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^x=0$,

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{2}\right)^x=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{\sqrt{x+7}}=0$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{12}{\ln x}=0$

Если где-нибудь есть сомнения, то можете взять в руки калькулятор и немного потренироваться.

В том случае, если $x \to \infty$, попробуйте построить последовательность $x=10$, $x=100$, $x=1000$. Если $x \to 0$, то $x=0{,}1$, $x=0{,}01$, $x=0{,}001$.

Примечание: строго говоря, такой подход с построением последовательностей из нескольких чисел некорректен, но для понимания простейших примеров вполне подойдет.

Также обратите внимание на следующую вещь. Даже если дан предел с большим числом вверху, да хоть с миллионом: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000000}{x}$, то все равно $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1000000}{x}=0$, так как рано или поздно «икс» примет такие гигантские значения, что миллион по сравнению с ними будет самым настоящим микробом.

Что нужно запомнить и понять из вышесказанного?

1) Когда дан любой предел, сначала просто пытаемся подставить число в функцию.

2) Вы должны понимать и сразу решать простейшие пределы, такие как $\lim\limits_{x\to\infty}(x^4+8x+10)=\infty$, $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x^2}=0$, $\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x^2}=\infty$ и т.д.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{\infty}{\infty}$ и метод их решения

Сейчас мы рассмотрим группу пределов, когда $x \to \infty$, а функция представляет собой дробь, в числителе и знаменателе которой находятся многочлены

<u>Пример:</u>

Вычислить предел $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$

Согласно нашему правилу попытаемся подставить бесконечность в функцию. Что у нас получается вверху? Бесконечность. А что получается внизу? Тоже бесконечность. Таким образом, у нас есть так называемая неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Можно было бы подумать, что $\frac{\infty}{\infty} = \infty$, и ответ готов, но в общем случае это вовсе не так, и нужно применить некоторый прием решения, который мы сейчас и рассмотрим.

Как решать пределы данного типа?

Сначала мы смотрим на числитель и находим x в старшей степени:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$$

Старшая степень в числителе равна двум.

Теперь смотрим на знаменатель и тоже находим x в старшей степени:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2}$$

Старшая степень знаменателя равна двум.

Затем мы выбираем самую старшую степень числителя и знаменателя: в данном примере они совпадают и равны двойке.

Итак, метод решения следующий: для того, чтобы раскрыть неопределенность $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x в старшей степени.

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x^2 - 3x - 5}{1 + x + 3x^2} = \frac{\infty}{\infty} = (*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*) = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2 - 3x - 5}{x^2}}{\frac{1 + x + 3x^2}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{2x^2}{x^2} - \frac{3x}{x^2} - \frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2} + \frac{x}{x^2} + \frac{3x^2}{x^2}} = \lim_{x \to \infty} \frac{2 - \overset{\to 0}{\frac{3}{x}} - \overset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}}{\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}} + \overset{\to 0}{\frac{1}{x}} + 3} = \frac{2}{3}$$

Вот оно как, ответ $\frac{2}{3}$, а вовсе не бесконечность.

Что принципиально важно в оформлении решения?

Во-первых, указываем неопределенность, если она есть.

Во-вторых, желательно прервать решение для промежуточных объяснений. Я обычно использую знак $(*)$, он не несет никакого математического смысла, а обозначает, что решение прервано для промежуточного объяснения.

В-третьих, в пределе желательно помечать, что и куда стремится. Когда работа оформляется от руки, удобнее это сделать так:

$$\frac{2-\frac{3}{x}-\frac{5}{x^2}}{\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x}+3}$$

Для пометок лучше использовать простой карандаш.
Конечно, можно ничего этого не делать, но тогда, возможно, преподаватель отметит недочеты в решении либо начнет задавать дополнительные вопросы по заданию. А оно Вам надо?

<u>Пример 2</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$

Снова в числителе и знаменателе находим x в старшей степени:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}$$

Максимальная степень в числителе: 3
Максимальная степень в знаменателе: 4
Выбираем наибольшее значение, в данном случае четверку.

Согласно нашему алгоритму, для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ делим числитель и знаменатель на x^4.

Полное оформление задания может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{7x^3+15x^2+9x+1}{5x^4+6x^2-3x-4}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^4

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{7x^3+15x^2+9x+1}{x^4}}{\dfrac{5x^4+6x^2-3x-4}{x^4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{7}{x}^{\to 0}+\frac{15}{x^2}^{\to 0}+\frac{9}{x^3}^{\to 0}+\frac{1}{x^4}^{\to 0}}{5+\frac{6}{x^2}^{\to 0}-\frac{3}{x^3}^{\to 0}-\frac{4}{x^4}^{\to 0}}=$$

$$=\frac{0+0+0+0}{5+0-0-0}=\frac{0}{5}=0$$

<u>Пример 3</u>

Найти предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Максимальная степень «икса» в числителе: 2

Максимальная степень «икса» в знаменателе: 1 (x можно записать как x^1)

Для раскрытия неопределенности $\frac{\infty}{\infty}$ необходимо разделить числитель и знаменатель на x^2.

Чистовой вариант решения может выглядеть так:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}=(*)$$

Разделим числитель и знаменатель на x^2

$$(*)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{2x^2-3x-5}{x^2}}{\frac{x+1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{2-\overset{\to 0}{\frac{3}{x}}-\overset{\to 0}{\frac{5}{x^2}}}{\overset{\to 0}{\frac{1}{x}}+\overset{\to 0}{\frac{1}{x^2}}}=\frac{2}{0}=\infty$$

Под записью $\frac{2}{0}$ подразумевается не деление на ноль (делить на ноль нельзя), а деление на бесконечно малое число.

Таким образом, при раскрытии неопределенности вида $\frac{\infty}{\infty}$ у нас может получиться *конечное число*, ноль или бесконечность.

Пределы с неопределенностью вида $\frac{0}{0}$ и метод их решения

Предвосхищаю вопрос от чайников: «Почему здесь деление на ноль? На ноль же делить нельзя!». Смысл записи 0:0 будет понятен позже, после ознакомления с четвёртым уроком о бесконечно малых функциях. А пока всем начинающим изучать математический анализ предлагаю читать далее.

Следующая группа пределов чем-то похожа на только что рассмотренные пределы: в числителе и знаменателе находятся многочлены, но «икс» стремится уже не к бесконечности, а к *конечному числу*.

Пример 4

Решить предел $\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}$

Сначала попробуем подставить -1 в дробь:

$$\frac{2(-1)^2-3\cdot(-1)-5}{-1+1}=\frac{0}{0}$$

В данном случае получена так называемая неопределенность $\frac{0}{0}$.

Общее правило: если в числителе и знаменателе находятся многочлены, и имеется неопределенности вида $\frac{0}{0}$, то для ее раскрытия нужно разложить числитель и знаменатель на множители.

Для этого чаще всего нужно решить квадратное уравнение и (или) использовать формулы сокращенного умножения. Если данные вещи позабылись, тогда посетите страницу Математические формулы и таблицы и ознакомьтесь с методическим материалом *Горячие формулы школьного курса математики*. Кстати его лучше всего распечатать, требуется очень часто, да и информация с бумаги усваивается лучше.

Итак, решаем наш предел

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1}=\frac{0}{0}=(*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители

Для того чтобы разложить числитель на множители, нужно решить квадратное уравнение:

$$2x^2-3x-5=0$$

Сначала находим дискриминант:

$$D=(-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5)=9+40=49$$

И квадратный корень из него: $\sqrt{D}=\sqrt{49}=7$.

В случае если дискриминант большой, например 361, используем калькулятор, функция извлечения квадратного корня есть на самом простом калькуляторе.

! Если корень не извлекается нацело (получается дробное число с запятой), очень вероятно, что дискриминант вычислен неверно либо в задании опечатка.

Далее находим корни:

$$x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

Таким образом:

$$2x^2-3x-5 = 2(x-(-1))\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$$

Всё. Числитель на множители разложен.

Знаменатель. Знаменатель $x+1$ уже является простейшим множителем, и упростить его никак нельзя.

$$(*) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = (*)$$

Очевидно, что можно сократить на $(x+1)$:

$$(*) = \lim_{x\to -1}(2x-5) = (*)$$

Теперь и подставляем -1 в выражение, которое осталось под знаком предела:

$$= 2\cdot(-1)-5 = -2-5 = -7$$

Естественно, в контрольной работе, на зачете, экзамене так подробно решение никогда не расписывают. В чистовом варианте оформление должно выглядеть примерно так:

$$\lim_{x\to -1}\frac{2x^2-3x-5}{x+1} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель на множители.

$$2x^2-3x-5=0$$

$$D = (-3)^2-4\cdot 2\cdot(-5) = 9+40 = 49$$

$$\sqrt{D} = \sqrt{49} = 7$$

$$x_1 = \frac{-(-3)-7}{2\cdot 2} = \frac{3-7}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

$$x_2 = \frac{-(-3)+7}{2\cdot 2} = \frac{3+7}{4} = \frac{10}{4} = \frac{5}{2}$$

$$2x^2-3x-5 = 2(x+1)\cdot\left(x-\frac{5}{2}\right) = (x+1)\cdot(2x-5)$$

$$(*) = \lim_{x\to -1}\frac{(x+1)\cdot(2x-5)}{x+1} = \lim_{x\to -1}(2x-5) = -2-5 = -7$$

<u>Пример 5</u>

Вычислить предел $\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12}$

Сначала «чистовой» вариант решения

$$\lim_{x\to 2}\frac{8-2x^2}{x^2+4x-12} = \frac{0}{0} = (*)$$

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Числитель: $8-2x^2 = 2(4-x^2) = 2(2-x)(2+x)$

Знаменатель:

$$x^2+4x-12=0$$
$$D=16+48=64$$
$$\sqrt{D}=8$$
$$x_1=\frac{-4-8}{2}=-6,\quad x_2=\frac{-4+8}{2}=2$$
$$x^2+4x-12=(x+6)(x-2)$$
$$(*)=\lim_{x\to 2}\frac{2(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{(2-x)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=2\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)(2+x)}{(x+6)(x-2)}=$$
$$=-2\lim_{x\to 2}\frac{(2+x)}{(x+6)}=-2\cdot\frac{4}{8}=-1$$

Что важного в данном примере?

Во-первых, Вы должны хорошо понимать, как раскрыт числитель, сначала мы вынесли за скобку 2, а затем использовали формулу разности квадратов. Уж эту-то формулу нужно знать и видеть.

Рекомендация: Если в пределе (практически любого типа) можно вынести число за скобку, то всегда это делаем.

Более того, такие числа целесообразно выносить за значок предела. Зачем? Да просто чтобы они не мешались под ногами. Главное, потом эти числа не потерять по ходу решения.

Обратите внимание, что на заключительном этапе решения я вынес за значок предела двойку, а затем – минус.

! Важно

В ходе решения фрагмент типа $\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x-2}$ *встречается очень часто. Сокращать такую дробь нельзя. Сначала нужно поменять знак у числителя или у знаменателя (вынести -1 за скобки).*

$\lim_{x\to 2}\frac{2-x}{x-2}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 2}\frac{-(x-2)}{x-2}=\lim_{x\to 2}(-1)=-1$*, то есть появляется знак «минус», который при вычислении предела учитывается и терять его совсем не нужно.*

Вообще, я заметил, что чаще всего в нахождении пределов данного типа приходится решать два квадратных уравнения, то есть и в числителе и в знаменателе находятся квадратные трехчлены.

Тема 3. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Методические рекомендации

Примеры решения типовых задач по дифференциальному исчислению функций одной переменной

Задача 12. Найти указанные пределы:

$$а)\ \lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+x-6};\qquad б)\ \lim_{x\to 0}\frac{4x}{arctg\,2x};$$
$$в)\ \lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1};\qquad г)\ \lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}.$$

Решение. а) Непосредственная подстановка предельного значения аргумента *X*=2 приводит к неопределенности вида *0/0*. Чтобы раскрыть эту неопределенность, разложим числитель и знаменатель на множители и сократим члены дроби на общий множитель *(x-2)*. Так как аргумент *X* только стремится к своему предельному значению 2, но не совпадает с ним, то множитель *(x-2)* отличен от нуля при *X®2*:

$$\lim_{x\to 2}\frac{2x^2+x-10}{x^2+2-6}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x+5)}{(x-2)(x+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{2x+5}{x+3}=\frac{9}{5}.$$

Б) пусть *Arctg 2X=Y*. Тогда *2x=Tg Y*; очевидно, что если *X®0*, то *Y®0.* Следовательно,

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{arctg2x}=\lim_{y\to 0}\frac{2tgy}{y}=2\lim_{y\to 0}\frac{\sin y}{y}\cdot\lim_{y\to 0}\frac{1}{\cos y}=2.$$

(используем первый замечательный предел).

Искомый предел можно найти иначе. Известно, что при нахождении предела отношения двух бесконечно малых величин можно каждую из них (или только одну) заменить другой бесконечно малой, ей эквивалентной. Так как при *X®0 Arctg 2X~2x*, то

$$\lim_{x\to 0}\frac{4x}{arctg2x}=\lim_{x\to 0}\frac{4x}{2x}=2.$$

В) При *X®¥* Основание $\frac{2x-1}{2x+3}$ стремиться к 1, а показатель степени *4x+1* стремиться к бесконечности. Следовательно, имеем неопределенность вида 1¥. Представим основание в виде суммы 1 и некоторой бесконечно малой величины:

$$\frac{2x-1}{2x+3}=\frac{2x+3-4}{2x+3}=1+\frac{-4}{2x+3}.$$

Тогда

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x-1}{2x+3}\right)^{4x+1}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{2x+3}\right)^{4x+1}.$$

Положим *2x+3=-4y*; при *X®+¥* переменная *У® -¥*. Выразим показатель степени через новую переменную *У*. Так как *2x=-4y-3*, то *4x+1=-8y-5*. Таким образом,

$$\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{-4}{-4y}\right)^{-8y-5}=\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-8y-5}=\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{y}\right]^{-8}\cdot\lim_{y\to-\infty}\left(1+\frac{1}{y}\right)^{-5}=e^{-8}\cdot 1^{-5}=e^{-8}.$$

(используем второй замечательный предел).

Г) При *X®2* Основание *(3x-5)* Стремится к единице, а показатель степени $\frac{4}{x-2}$ стремиться к бесконечности.

Положим *3x-5=1+A*, где *A®0* При *X®2*. Тогда

$$3x=6+\alpha;\ x=2+\frac{\alpha}{3};\ и\ x-2=\frac{\alpha}{3}.$$

Выразив основание и показатель степени через *A*, получим

$$\lim_{x\to 2}(3x-5)^{\frac{4}{x-2}}=\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{12}{\alpha}}=\left[\lim_{x\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}\right]^{12}=e^{12}.$$

Задача 13. Функция *У* задана различными аналитическими выражениями для различных областей изменения аргумента *X*:

$$y=\begin{cases}x+2, & если\quad x\le -2;\\ x^2-4, & если\quad -2\prec x\prec 1;\\ 4-2x & если\quad x\ge 1.\end{cases}$$

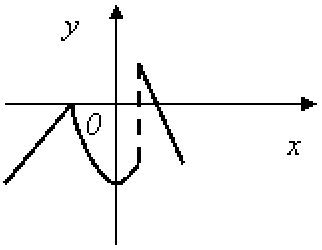


Рис. 5.

Требуется: 1) найти точки разрыва функции, если они существуют; 2) найти предел функции *У* при приближении аргумента *X* к точке разрыва слева и справа; 3) найти скачок функции в точке разрыва.

<u>Решение</u>. Данная функция определена и непрерывна в интервалах (-¥, -2), (-2, 1) и (1, +¥). При *X*=-2 и *X*=1 меняется аналитическое выражение функции, и только в этих точках функция может иметь разрыв. Определим односторонние пределы в точке *X*=-2:

$$\lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} y = \lim_{\substack{x\to-2\\x<-2}} (x+2) = 0; \quad \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} y = \lim_{\substack{x\to-2\\x>-2}} (x^2-4) = 0.$$

Односторонние пределы совпадают. Функция в этой точке непрерывна. Определим односторонние пределы в точке *X*=1:

Так как односторонние пределы функции *У* в точке *X*=1 не равны между собой, то в этой точке функция имеет разрыв первого рода.

Скачком функции в точке разрыва называется абсолютная величина разности между ее правым и левым предельным значениями. Следовательно, в точке *X*=1 скачок функции $\Delta = |2-(-3)| = 5$. График функции показан на рис. 5.

Задача 14. Дана функция $y = \dfrac{3x}{x+2}$.

Требуется: 1) установить, является ли данная функция непрерывной или разрывной при значениях аргумента *X1*=-2 и *X2*=3; 2) найти односторонние пределы в точках разрыва; 3) построить график данной функции на отрезке [-6;6].

Решение. Если ищется предел функции *У=F(x)* при условии, что аргумент *X*, стремясь к своему предельному значению *А*, может принимать только такие значения, которые меньше *А*, то этот предел, если он существует, называется правосторонним (правым) пределом данной функции в точке *X=A* и условно обозначается так:

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} y = \lim_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} f(x), \quad \textit{или} \quad \lim_{x\to\alpha+0} y = \lim_{x\to\alpha+0} f(x).$$

Функция *У=F(x)* непрерывна при *X=A*, если выполняются следующие условия: 1) функция *У=F(x)* определена не только в точке *А*, но и в некотором интервале, содержащем эту точку; 2) функция *У=F(x)* имеет при *X®A* конечные и равные между собой односторонние пределы; 3) односторонние пределы при *X®A* Совпадают со значением функции в точке *А*, т. е.

$$\lim_{\substack{x\to\alpha\\x<\alpha}} f(x) = \lim_{\substack{x\to\alpha\\x>\alpha}} f(x) = f(\alpha).$$

Если для данной функции *У=F(x)* в данной точке *X=A* хотя бы одно из перечисленных трех условий не выполняется, то функция называется разрывной в точке *X=A*.

Разрыв функции *У=F(x)* в точке *X=A* называется разрывом первого рода, если односторонние пределы слева и справа существуют, но не равны между собой. Если же хотя бы один из односторонних пределов не существует, разрыв в этой точке называется разрывом второго рода.

При *X*=-2 данная функция не существует: в этой точке функция терпит разрыв. Определим односторонние пределы функции при *X*®-2 слева и справа

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} y = \lim_{\substack{x\to -2\\ x<-2}} \frac{3x}{x+2} = +\infty,$$

Так как знаменатель стремится к нулю, оставаясь отрицательным;

$$\lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} y = \lim_{\substack{x\to -2\\ x>-2}} \frac{3x}{x+2} = -\infty,$$

Так как знаменатель стремится к нулю, оставаясь положительным.

Таким образом, при *X*=-2 данная функция имеет разрыв второго рода. При *X*=3 данная функция непрерывна, так как выполняются все три условия непрерывности функции.

Данная функция является дробно-линейной. Известно, что графиком дробно-линейной функции служит равносторонняя гипербола, асимптоты которой параллельны осям координат (прямоугольных).

Чтобы построить эту гиперболу на заданном отрезке составим следующую таблицу:

X	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6
У	9/2	5	6	9	+¥	-3	0	1	3/2	9/5	2	15/2	9/4

График функции показан на рис. 6.

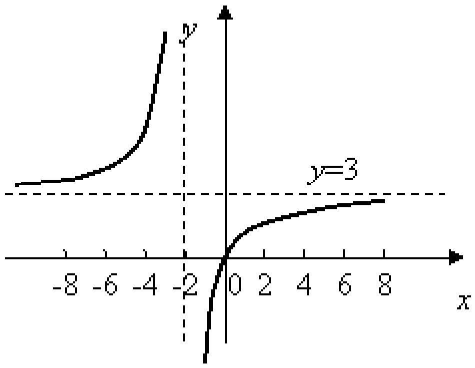


Рис. 6.

Задача 15. Найти производные $\frac{dy}{dx}$ функций

А) $y = \ln\sqrt[4]{\frac{4x-1}{4x+1}}$; б) $y = (x+1)^{arctg\, x}$;

В) $\cos(xy) = \frac{x}{y} = 0$; г) $\begin{cases} x = a\cos t + (at+b)\sin t, \\ y = a\sin t - (at+b)\cos t. \end{cases}$

Решение. а) Пользуясь правилом логарифмирования корня и дроби, преобразуем правую часть:

$$y = \frac{1}{4}\left[\ln(4x-1) - \ln(4x+1)\right]$$

Применяя правила и формулы дифференцирования, получим:

$$y' = \frac{1}{4}\left[\frac{4}{4x-1} - \frac{4}{4x+1}\right] = \frac{1}{4x-1} - \frac{1}{4x+1} = \frac{2}{16x^2-1}.$$

Б) Предварительно прологарифмируем по основанию в обе части равенства:

$\ln y = arctgx \ln(x+1).$

Теперь дифференцируем обе части, считая ln*У* сложной функцией от переменной *X*:

$$\frac{1}{y}y' = \frac{1}{1+x^2}\ln(x+1) + arctgx\frac{1}{x+1} = \frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{x+1},$$

откуда

$$y' = (x+1)^{arctgx} \times \left[\frac{\ln(x+1)}{1+x^2} + \frac{arctgx}{x+1}\right].$$

В) В данном случае зависимость между аргументом *X* и функцией *У* задана уравнением, которое не разрешено относительно функции *У*. Чтобы найти производную *У'*, следует дифференцировать по *X* обе части заданного уравнения, считая при этом *У* функцией от *X*, а затем полученное уравнение решить относительно искомой производной *У'*. Имеем

$$-\sin(xy)(y+xy') - \frac{y-xy'}{y^2} = 0.$$

Из полученного равенства, связывающего *X, y* И *y'*, находим производную *У'*:

$$-y^3\sin(xy) = xy^2y'\sin(xy) - y + xy' = 0,$$

$$y'\left[x - xy^2\sin(xy)\right] = y + y^2\sin(xy),$$

откуда

$$y' = \frac{y+y^2\sin(xy)}{x-xy^2\sin(xy)} = \frac{y\left[1+y^2\sin(xy)\right]}{x\left[1-y^2\sin(xy)\right]}.$$

Г) Зависимость между переменными *X* И *У* задана параметрическими уравнениями. Чтобы найти искомую производную *У'*, находим предварительно дифференциалы *Dx* И *Dy* и затем берем отношение этих дифференциалов

Тема 4 Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Методические рекомендации

Примеры решения

Задание 1: Вычислить интеграл:

А) $\int\left(x^5 + \frac{4}{x^3} - \sqrt[3]{x^2} - 7\right)dx;$ Б) $\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}};$ В) $\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx;$

Г) $\int 3^{2-7x}dx;$ Д) $\int\frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}dx;$ Е) $\int e^x\cdot\sin e^x dx;$

Ж) $\int\frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx;$ З) $\int\frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx;$ И) $\int\frac{\sin 5x}{4-\cos^2 5x}dx;$

К) $\int x\cdot\operatorname{tg}x^2 dx;$ Л) $\int\frac{3^x}{9^x+4}dx;$ М) $\int x^2\cdot\cos x\, dx;$

Н) $\int\arccos x\, dx;$ О) $\int\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx;$ П) $\int\frac{x^6}{x^2-x+1}dx;$

Р) $\int\frac{dx}{\sin x(2+\cos x-2\sin x)};$ С) $\int\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}};$ Т) $\int\cos 3x\cos 5x dx;$

У) $\int\sin^4 x\, dx;$ Ф) $\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}};$

Решение:

А) Найдем интеграл, применив свойства неопределенного интеграла и формулы (**1**) и (**2**) табличного интегрирования:

$$\int\left(x^5+\frac{4}{x^3}-\sqrt[3]{x^2}-7\right)dx=\int\left(x^5+4\cdot x^{-3}-x^{\frac{2}{3}}-7\right)dx=\int x^5dx+4\int x^{-3}dx-\int x^{\frac{2}{3}}dx-7\int dx=$$

$$=\frac{x^{5+1}}{5+1}+4\cdot\frac{x^{-3+1}}{-3+1}-\frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1}-7x+C=\frac{x^6}{6}+4\cdot\frac{x^{-2}}{-2}-\frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}}-7x+C=\frac{x^6}{6}-\frac{2}{x^2}-\frac{3\sqrt[3]{x^2}}{5}-7x+C;$$

Интегралы (б – л) решим методом замены переменной**.**

Б)
$$\int\frac{dx}{\sqrt[4]{(1+2x)^3}}\left|\begin{array}{l}t=1+2x;\\dt=2dx;\\dx=\frac{1}{2}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt[4]{t^3}}=\frac{1}{2}\int t^{-\frac{3}{4}}dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{4}}}{1/4}+C=2(1+2x)^{1/4}+=2\sqrt[4]{1+2x}+C;$$

В**)**
$$\int\frac{x^4}{\sin^2 x^5}dx=\left|\begin{array}{l}t=x^5\\dt=5x^4dx\\x^4dx=\frac{1}{5}dt\end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{5}dt}{\sin^2 t}=\frac{1}{5}\int\frac{dt}{\sin^2 t}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**12**)}

$$=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}t+C=-\frac{1}{5}\operatorname{ctg}x^5+C;$$

Г)
$$\int 3^{2-7x}dx=\left|\begin{array}{l}t=2-7x,\\dt=-7dx,\\dx=-\frac{1}{7}dt\end{array}\right|=\int 3^t\cdot\left(-\frac{1}{7}\right)dt=-\frac{1}{7}\int 3^t dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**4**)}

$$=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^t}{\ln 3}+C=-\frac{1}{7}\cdot\frac{3^{2-7x}}{\ln 3}+C;$$

Д)
$$\int\frac{\operatorname{arctg}x}{1+x^2}dx=\left|\begin{array}{l}t=\operatorname{arctg}x\\dt=\frac{1}{1+x^2}dx\end{array}\right|=\int t\,dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\frac{t^2}{2}+C=\frac{1}{2}\operatorname{arctg}^2x+C;$$

Е)
$$\int e^x\cdot\sin e^x dx=\left|\begin{array}{l}t=e^x\\dt=e^x dx\end{array}\right|=\int\sin t\,dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**5**)}

$$=-\cos t+C=-\cos e^x+C;$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{4-x^4}}dx = \left| \begin{matrix} t = x^2 \\ dt = 2xdx \\ xdx = \frac{1}{2}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{4-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{\sqrt{2^2-t^2}} =$$

Ж)

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$$= \frac{1}{2}\arcsin\frac{x^2}{2} + C;$$

$$\int \frac{e^x}{\sqrt{e^{2x}-7}}dx = \int \frac{e^x}{\sqrt{\left(e^x\right)^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}}dx = \left| \begin{matrix} t = e^x, \\ dt = e^x dx, \\ e^x dx = dt \end{matrix} \right| = \int \frac{dt}{\sqrt{t^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2}} =$$

З)

{для нахождения интеграла применим формулу (**10**)}

$$= \ln\left|\sqrt{t^2 - \left(\sqrt{7}\right)^2} + t\right| + C = \ln\left|\sqrt{e^{2x}-7} + e^x\right| + C;$$

$$\int \frac{\sin 5x\, dx}{9-\cos^2 5x} = \left| \begin{matrix} t = \cos 5x \\ dt = -5\sin 5x\, dx \\ \sin 5x\, dx = -\frac{1}{5}dt \end{matrix} \right| = \int \frac{-\frac{1}{5}dt}{9-t^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2-9} = \frac{1}{5}\int \frac{dt}{t^2-3^2} =$$

И)

{для нахождения интеграла применим формулу (**9**)}

$$= \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{t-3}{t+3}\right| + C = \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{2\cdot 3}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right| + C = \frac{1}{30}\ln\left|\frac{\cos 5x-3}{\cos 5x+3}\right| + C;$$

$$\int x\cdot \operatorname{tg} x^2 dx = \int \frac{x\sin x^2}{\cos x^2}dx = \left| \begin{matrix} t = \cos x^2 \\ dt = -2x\sin x^2 dx \\ x\sin x^2 dx = -\frac{1}{2}dt \end{matrix} \right| = -\int \frac{\frac{1}{2}dt}{t} = -\frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} =$$

К)

{для нахождения интеграла применим формулу (**3**)}

$$= -\frac{1}{2}\ln|t| + C = -\frac{1}{2}\ln\left|\cos x^2\right| + C;$$

$$\int \frac{3^x}{9^x+4}dx = \int \frac{3^x}{\left(3^x\right)^2 + 2^2}dx = \left| \begin{matrix} t = 3^x \\ dt = 3^x \ln 3dx \\ 3^x dx = \frac{1}{\ln 3}dt \end{matrix} \right| = \frac{1}{\ln 3}\int \frac{dt}{t^2+2^2} =$$

Л)

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$$= \frac{1}{\ln 3}\cdot\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{t}{2} + C = \frac{1}{2\ln 3}\operatorname{arctg}\frac{3^x}{2} + C;$$

Найдем интегралы (м – н) методом интегрирования по частям,

Используя формулу $\int U\cdot V' dx = U\cdot V - \int U'\cdot V dx$ (**13**):

М) $\int x^2\cos x dx = \begin{vmatrix} U = x^2; & U' = 2x \\ V' = \cos x; & V = \sin x \end{vmatrix} = x^2 \sin x - \int 2x\cdot \sin x dx =$

$= \begin{vmatrix} U = 2x; & U' = 2 \\ V' = \sin x; & V = -\cos x \end{vmatrix} == x^2\cdot\sin x - \left(2x\cdot(-\cos x) - \int 2\cdot(-\cos x)dx\right) =$

{для нахождения интеграла применим формулу (**6**)}

$= x^2\sin x + 2x\cos x - 2\sin x + C;$

Н) $\int \arccos x\, dx = \begin{vmatrix} U = \arccos x; & U' = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \\ V' = 1; & V = x \end{vmatrix} = x\cdot\arccos x - \int x\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}dx$

{второе слагаемое вычислим с помощью замены, применив формулу (**2**)}

$$\int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}dx = \begin{vmatrix} t = 1-x^2 \\ dt = -2xdx \\ -xdx = \dfrac{1}{2}dt \end{vmatrix} = \int \frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}} = \frac{1}{2}\cdot\frac{t^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = \sqrt{1-x^2} + C$$

в итоге получаем $\int \arccos x dx = x\cdot\arccos x - \sqrt{1-x^2} + C;$

О) $\int \dfrac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x}dx$.

Под знаком интеграла правильная рациональная дробь. Разложим её на простейшие дроби:

$$\frac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \frac{x^2+3x+6}{x(x-2)(x-3)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{x-3} =$$

$$= \frac{A(x-2)(x-3) + Bx(x-3) + Cx(x-2)}{x(x-2)(x-3)} =$$

$$= \frac{Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx}{x(x-2)(x-3)};$$

Перейдем к равенству числителей:

$x^2 + 3x + 6 = Ax^2 - 5Ax + 6A + Bx^2 - 3Bx + Cx^2 - 2Cx$.

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} x^2:\ 1 = A + B + C \\ x^1:\ 3 = -5A - 3B - 2C \\ x^0:\ 6 = 6A \end{array}\right\} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = 1 + B + C \\ 8 = -3B - 2C \\ A = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = 1, \\ B = -8, \\ C = 8. \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{x^2+3x+6}{x^3-5x^2+6x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{8}{x-2} + \dfrac{8}{x-3}$.

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя свойства неопределённого интеграла, получим:

$$\int\left(\frac{1}{x} - \frac{8}{x-2} + \frac{8}{x-3}\right)dx = \int\frac{dx}{x} - 8\int\frac{dx}{x-2} + 8\int\frac{dx}{x-3} =$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$= \ln|x| - 8\ln|x-2| + 8\ln|x-3| + C;$

П) $\int \frac{x^6}{x^2 - x + 1} dx$.

Под знаком интеграла неправильная рациональная дробь. Выделим целую часть этой дроби путем деления числителя на знаменатель:

$$\frac{x^6}{x^2 - x + 1} = x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{x^2 - x + 1}$$

Выделим полный квадрат в знаменателе правильной рациональной дроби:

$$x^2 - x + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} + 1 = \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

Возвращаясь к исходному интегралы, получим:

$$\int \left(x^4 + x^3 - x - 1 + \frac{1}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}}\right) dx = \int x^4 dx + \int x^3 dx - \int x dx - \int 1 dx + \int \frac{dx}{\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$$

{для нахождения первых трёх интегралов применим формулу (**2**), для четвёртого – формулу (**1**), последний интеграл найдем с помощью формулы (**7**)}

$$= \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{1}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \operatorname{arctg} \frac{x - \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} + C = \frac{x^5}{5} + \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - x + \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x - 1}{\sqrt{3}} + C;$$

Р) $\int \frac{dx}{\sin x(2 + \cos x - 2\sin x)}$.

Найдем интеграл используя универсальную тригонометрическую подстановку:

$$\left| \begin{array}{l} t = \operatorname{tg}\frac{x}{2}, \quad \sin x = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{2t}{1 + t^2}, \quad \cos x = \dfrac{1 - \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = \dfrac{1 - t^2}{1 + t^2}, \\ \dfrac{x}{2} = \operatorname{arctg} t, \; x = 2\operatorname{arctg} t \Rightarrow dx = \dfrac{2dt}{1 + t^2} \end{array} \right|$$

$$= \int \frac{\frac{2dt}{1 + t^2}}{\frac{2t}{1 + t^2}\left(2 + \frac{1 - t^2}{1 + t^2} - 2 \cdot \frac{2t}{1 + t^2}\right)} = \int \frac{1 + t^2}{t(t^2 - 4t + 3)} dt.$$

Разложим подынтегральную функцию на простейшие дроби:

$$\frac{1 + t^2}{t(t^2 - 4t + 3)} = \frac{1 + t^2}{t(t - 1)(t - 3)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t - 1} + \frac{C}{t - 3} =$$
$$= \frac{A(t - 1)(t - 3) + Bt(t - 3) + Ct(t - 1)}{t(t - 1)(t - 3)}$$

Перейдем к равенству числителей:

$$1 + t^2 = At^2 - 4At + 3A + Bt^2 - 3Bt + Ct^2 - Ct.$$

Отсюда следует, что

$$\left.\begin{array}{l} t^2:\ 1=A+B+C \\ t^1:\ \ 0=-4A-3B-C \\ t^0:\ 1=3A \end{array}\right\}\Leftrightarrow\begin{cases} A=\frac{1}{3}, \\ B=-1, \\ C=\frac{5}{3}, \end{cases}$$

Тогда $\dfrac{1+t^2}{t\left(t^2-4t+3\right)}=\dfrac{1}{3t}-\dfrac{1}{t-1}+\dfrac{5}{3(t-3)}$.

Интегрируя почленно полученное равенство, получим::

$$\frac{1}{3}\int\frac{dt}{t}-\int\frac{dt}{t-1}+\frac{5}{3}\int\frac{dt}{t-3}=$$

{для нахождения интегралов применим формулу (**3**)}

$$=\frac{1}{3}\ln|t|-\ln|t-1|+\frac{5}{3}\ln|t-3|+C=\frac{1}{3}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}\right|-\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-1\right|+\frac{5}{3}\ln\left|\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}-3\right|+C;$$

С) $\displaystyle\int\frac{3xdx}{\sqrt{3x^2-2}+\sqrt[4]{3x^2-2}}$.

Произведем замену: $3x^2-2=t,\ dt=6xdx,\ 3xdx=\dfrac{1}{2}dt.$

Получим: $\displaystyle\int\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}+\sqrt[4]{t}}=$

Наименьшее общее кратное знаменателей дробей $\dfrac{1}{2}$ и $\dfrac{1}{4}$ есть 4, поэтому введем следующую замену:

$$\left|\begin{array}{l} t=z^4 \\ dt=4z^3dz \\ z=\sqrt[4]{t} \end{array}\right|=\frac{1}{2}\int\frac{4z^3dz}{\sqrt{z^4}+\sqrt[4]{z^4}}=2\int\frac{z^2}{z^2+z}dz=2\int\frac{z^2}{z(z+1)}dz=2\int\frac{z}{z+1}dz=$$

$$=2\int\left(1-\frac{1}{z+1}\right)dz=2\int dz-2\int\frac{dz}{z+1}=$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**3**)}

$$=2z-2\ln|z+1|+C=2\sqrt[4]{3x^2-2}-2\ln\sqrt[4]{3x^2-2}+C;$$

Т) $\displaystyle\int\cos 3x\cos 5xdx$.

Найдем интеграл, используя формулу тригонометрических преобразований

$$\cos 3x\cdot\cos 5x=\frac{1}{2}\left(\cos(3x-5x)+\cos(3x+5x)\right)=\frac{1}{2}\left(\cos(-2x)+\cos 8x\right)=\frac{1}{2}\left(\cos 2x+\cos 8x\right)$$

Интегрируя почленно полученное равенство и применяя формулу (**6**), получим:

$$\int\frac{1}{2}\left(\cos 8x+\cos 2x\right)dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left(-\sin 8x\right)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(-\sin 2x\right)+C=-\frac{1}{16}\sin 8x-\frac{1}{4}\sin 2x+C;$$

У) $\displaystyle\int\sin^4 x\,dx=\int\left(\sin^2 x\right)^2dx=\left\{\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}\right\}=\int\left(\frac{1-\cos 2x}{2}\right)^2dx=$

$$=\int\frac{1-2\cos 2x+\cos^2 2x}{4}dx=\left\{\cos^2 2x=\frac{1+\cos 4x}{2}\right\}=\frac{1}{4}\int\left(1-2\cos 2x+\frac{1+\cos 4x}{2}\right)dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-2\cdot\frac{1}{4}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int dx+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\int\cos 4x\,dx=$$

$$=\frac{1}{4}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\int dx+\frac{1}{8}\int\cos 4x\,dx==\frac{3}{8}\int dx-\frac{1}{2}\int\cos 2x\,dx+\frac{1}{8}\int\cos 4x\,dx=$$

{для нахождения интегралов применим формулы (**1**) и (**6**)}

$$=\frac{3}{8}x-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{4}\sin 4x+C=\frac{3}{8}x-\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{32}\sin 4x+C;$$

;

Ф) $\displaystyle\int\frac{dx}{\sqrt{e^{2x}-1}}=$:

$$\left|\begin{array}{l} t=\sqrt{e^{2x}-1},\\ e^{2x}=t^2+1,\\ x=\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right),\\ dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt \end{array}\right|=\int\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{2t}{t^2+1}dt}{t}=\int\frac{dt}{t^2+1}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**7**)}

$$=\operatorname{arctg} t+C=\operatorname{arctg}\sqrt{e^{2x}-1}+C.$$

Задание 2: Вычислить несобственные интегралы или установить их расходимость.

А) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}$; Б) $\displaystyle\int_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}$

<u>Решение</u>:

А) Несобственный интеграл I рода.

$$\int_0^{\infty}\frac{x\,dx}{\sqrt{x^2+4}}=\left|\begin{array}{l} t=x^2+4\\ dt=2x\,dx\\ x\,dx=\frac{1}{2}dt\\ x_1=0\Leftrightarrow t_1=4\\ x_2=-\infty\Leftrightarrow t_2=\infty \end{array}\right|=\int_4^{\infty}\frac{\frac{1}{2}dt}{\sqrt{t}}=\lim_{b\to\infty}\int_4^{b}\frac{1}{2}t^{-\frac{1}{2}}dt=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**2**)}

$$=\lim_{b\to\infty}\left(t^{\frac{1}{2}}\Big|_4^b\right)==\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{t}\Big|_4^b\right)=\lim_{b\to\infty}\left(\sqrt{b}-2\right)=\infty$$

- интеграл расходится.

Б) Несобственный интеграл II рода.

$x=4$ является точкой разрыва подынтегральной функции, поэтому:

$$\int_0^{4}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{4-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{16-x^2}}=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^{4-\varepsilon}\frac{dx}{\sqrt{4^2-x^2}}=$$

{для нахождения интеграла применим формулу (**8**)}

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\frac{x}{4}\Big|_0^{4-\varepsilon}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\arcsin\left(1-\frac{\varepsilon}{4}\right)-\arcsin 0\right)=\frac{\pi}{2}$$

- интеграл сходится.

Тема 5 Дифференциальное исчисление функции нескольких действительных переменных

Методические рекомендации

Примеры решения типовых задач по дифференциальному и интегральному исчислению функций нескольких переменных**Задача 31.** Исследовать на экстремум функцию *Z=-4+6X-X2-Xy-Y2*.

Решение. Чтобы исследовать данную дважды дифференцируемую функцию *Z=F(X,Y)* на экстремум, необходимо:

1. Найти частные производные первого порядка $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$, приравнять их нулю и решить систему уравнений

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 0.$$

Каждая пара действительных корней этой системы определяет одну стационарную точку исследуемой функции. Пусть *P0 (x0;y0)* одна из этих точек.

2. Найти частные производные второго порядка $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ и вычислить их значения в каждой стационарной точке.

Положим, что $A = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]_{P_0}; \ B = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right]_{P_0}; \ C = \left[\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right]_{P_0}$.

3. Составить и вычислить определитель второго порядка $\Delta = \begin{vmatrix} A & B \\ B & C \end{vmatrix} = AC - B^2$.

4. Если в исследуемой стационарной точке *P0 (x0;y0)* $D>0$, то функция *Z=F(X,Y)* в этой точке имеет максимум при $A<0$ и минимум при $A>0$; если $D<0$, то в исследуемой точке нет экстремума.

Если $D=0$, то вопрос об экстремуме требует дополнительного исследования.

Находим стационарные точки заданной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6 - 2x - y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -x - 2y.$$

Решение системы $\begin{cases} 6 - 2x - y = 0, \\ -x - 2y = 0. \end{cases}$ дает *X0*=4, *У0*=-2.

Следовательно, данная функция имеет только одну стационарную точку *P0* (4,-2).

Находим частные производные второго порядка и их значения в найденной стационарной точке:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -2; \ \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -1; \ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2.$$

Как видно, частные производные второго порядка не содержат *X*, они постоянны в любой точке и, в частности в точке *P0* (4,-2). Имеем *A*=-2; *B*=-1; *C*=-2.

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \succ 0.$$

Так как $D>0$ и $A<0$, то в точке *P0* (4;-2) данная функция имеет максимум:

$$z_{макс} = z(4;-2) = -4 + 24 - 16 + 8 - 4 = 8.$$

Задача 32. Написать уравнение касательной плоскости и уравнение нормали к поверхности *3xy2-2yZ+4Xz-2=0* в точке *M0 (x0;y0;Z0)*, если *X0*=-1 и *У0*=2.

Решение. Определим аппликату *Z0* точки касания; для этого подставляем значения *X0* и *У0* в данное уравнение поверхности:

$$3(-1)2^2 - 2\cdot 2z_0 + 4(-1)z_0 - 4 = 0;$$

$$-8z_0 = 16; \quad z_0 = -2.$$

Таким образом, *M0* (-1;2;-2) – точка касания.

Уравнение касательной плоскости, проведенной к поверхности *F (X,Y,Z)*=0 в точке *M0 (x0;y0;Z0)*, имеет вид:

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}(x - x_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}(y - y_0) + \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}(z - z_0) = 0. \qquad (1)$$

Нормаль проходит через точку касания и перпендикулярная касательной плоскости. Уравнения нормали имеют вид:

$$\frac{x - x_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0}} = \frac{y - y_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0}} = \frac{z - z_0}{\left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0}}. \qquad (2)$$

Находим частные производные $\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}$ и вычисляем их значения в точке касания *M0* (-1;2;-2):

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 3y^2 + 4z; \ \frac{\partial F}{\partial y} = 6xy - 2z; \ \frac{\partial F}{\partial z} = -2y + 4x;$$

$$\left[\frac{\partial F}{\partial x}\right]_{M_0} = 4; \left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{M_0} = -8; \left[\frac{\partial F}{\partial z}\right]_{M_0} = -8.$$

Подставив в (1) найденные значения частных производных и координаты точки касания, получаем

$$4(x+1) - 8(y-2) - 8(x+2) = 0,$$

Или после упрощения *X-2y-2Z+1=0* – Уравнение касательной плоскости.

Из (2) имеем

$$\frac{x+1}{4} = \frac{y-2}{-8} = \frac{z+2}{-8},$$

Или

$$\frac{x+1}{1} = \frac{y-2}{-2} = \frac{z+2}{-2}$$ - искомые уравнения нормали.

Задача 33. Найти наибольшее и наименьшее значения функции *Z=X2+2Y2-2X-8Y+5* в замкнутом треугольнике *AOB*, ограниченном осями координат и прямой *X+y-4=0* (рис. 12).

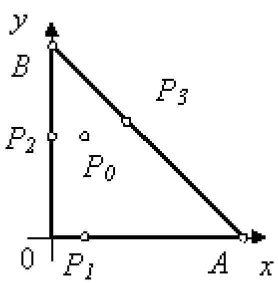


Рис. 12.

Решение. Чтобы найти наибольшее и наименьшее значения функции в заданной замкнутой области, необходимо: 1) найти стационарные точки, лежащие внутри области, и вычислить значения функции в этих точках; исследовать на экстремум эти точки не следует; 2) найти наибольшее и наименьшее значения функции на границе области; если граница состоит из нескольких линий, то исследование проводится для каждого участка в отдельности; 3) сравнить полученные значения функции и установить наибольшее и наименьшее значения функции в заданной замкнутой области.

Находим стационарные точки, лежащие внутри заданной области:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2;\ \frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8.$$

Приравняв нулю частные производные и решив полученную систему

$$\begin{cases} 2x - 2 = 0, \\ 4y - 8 = 0, \end{cases}$$

Находим стационарную точку *P0* (1;2). Эта точка принадлежит заданной области. Вычислим значение функции в этой точке:

Z(P0)=Z(1;2)=1+8-2-16+6=-4.

Граница области состоит из отрезка *OA* оси *Ox*, отрезка *OB* оси *Oy* и отрезка *AB*. Определим наибольшее и наименьшее значения функции *Z* на каждом из этих трех участков. На отрезке *OA y*=0, а 0£*X*£4. Если *У*=0, то *Z(x)=x2-2x+5*. Находим наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [0,4]:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x - 2;\ 2x - 2 = 0;\ x = 1;\ P_1(1;0);$$

$$z(P_1) = z(1;0) = 4.$$

Вычислим значения функции на концах отрезка *OA*, т. е. в точках 0 (0;0) и *A* (4;0):

Z(0)=5; Z(4)=13.

На отрезке *OB X*=0 и 0£*У*£4. Если *X*=0, то *Z(y)=2y2-8y+5*. Находим наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [0,4]:

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y - 8;\ 4y - 8 = 0;\ y = 2;\ P_2(0;2);$$

$$z(P_2) = -3.$$

В точке *O* (0;0) значение функции уже было найдено. Вычислим значение функции в точке *B*

Z(B)=Z(0;4)=5.

Теперь исследуем отрезок *AB*. Уравнением прямой *AB* будет *У=4-x*. Подставив это выражение для *У* в заданную функцию *Z*, получим

$$z = x^2 + 2(4-x)^2 - 2x - 8(4-x) + 5 = 3x^2 - 10x + 5.$$

Определим наибольшее и наименьшее значения этой функции на отрезке [0,4]:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 6x - 10;\ 6x - 10 = 0;\ x = \frac{5}{3};\ P_3(\frac{5}{3};\frac{7}{3}).$$

P3 – стационарная точка на отрезке *AB*. Вычислим значение функции в этой точке:

$$z(P_3) = z(\frac{5}{3};\frac{7}{3}) = -\frac{10}{3}.$$

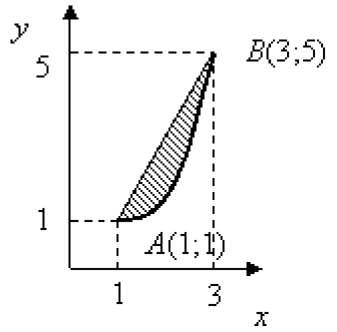
Значения функции на концах отрезка *AB* найдены ранее.

Сравнивая полученные значения функции *Z* в стационарной точке *P0* заданной области, в стационарных точках на границах области *P1, P2, P3* и в точках *O, A,* и *B*, заключаем, что наибольшее значение в заданной замкнутой области функция *Z* имеет в точке *A*, наименьшее значение – в точке *P0* (1;2). Итак,

$$z_{наиб} = z(4;0) = 13;\ z_{наим} = z(1;2) = -4.$$

Задача 34. Дан интеграл $\iint\limits_D dxdy = \int\limits_1^3 dx \int\limits_{(x-1)^2+1}^{2x-1} dy.$ Требуется: 1) построить на плоскости *XOy* область интегрирования *D*; 2) изменить порядок интегрирования; 3) вычислить площадь области *D* при заданном и измененном порядке интегрирования.

Решение. 1. Пределы внешнего интеграла по переменной *X* – числа 1 и 3 – указывают на то, что область *D* ограничена слева прямой *X*=1 и справа прямой *X*=3.
Пределы внутреннего интеграла по переменной *У* указывают на то, что область *D* ограничена снизу параболой *У=(х-1)2+1* и сверху прямой *У=2х-1*. Построив эти линии на отрезке [1;3], получим область *D* (рис. 13).



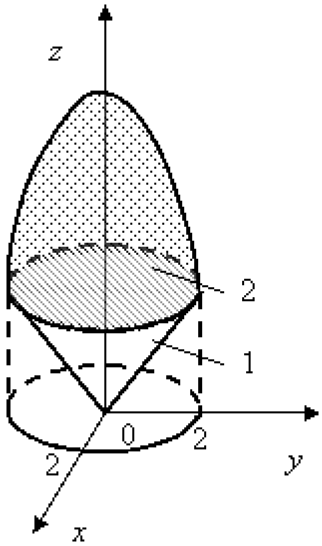


Рис. 13. Рис. 14: **1)** $z = \sqrt{x^2 + y^2}$;
2) $z = 6 - x^2 - y^2$

2. Чтобы изменить порядок интегрирования, установим пределы интегрирования для внешнего интеграла по переменной *У*. Как видно из рис 13, наименьшее значение, которое принимает *У* в области *D*, равно 1 в точке *А* (1;1), а наибольшее значение равно 5 в точке *В* (3;5). Следовательно, внешний интеграл по переменной *У* будет иметь пределы: 1 (нижний предел) и 5 (верхний предел).
Определим пределы для внутреннего интеграла по переменной *X*.

Из уравнения прямой *У=2х-1* получаем $x = \dfrac{y+1}{2}$ Нижний предел.

Из уравнения параболы *У=(х-1)2* получаем $x = \sqrt{y-1} + 1$ - верхний предел. Таким образом,

$$\iint_D dxdy = \int_1^3 dx \int_{(x-1)^2+1}^{2x-1} dy = \int_1^5 dy \int_{\frac{y+1}{2}}^{\sqrt{y-1}+1} dx.$$

3. Вычислим площадь области *D* при заданном порядке интегрирования:

$$S_D = \int_1^3 dx \int_{(x-1)^2+1}^{2x-1} dy = \int dx \left. y \right|_{(x-1)^2+1}^{2x-1} = \int_1^3 \left[2x - 1 - (x-1)^2 - 1\right] dx = \int_1^3 2(x-1)dx - \int_1^3 (x-1)^2 dx =$$

$$= \left[(x-1)^2\right]_1^3 - \left[\frac{(x-1)^3}{3}\right]_1^3 = 4 - 0 - \frac{8}{3} + 0 = \frac{4}{3}.$$

Вычислим площадь области *D* при измененном порядке интегрирования:

$$S_D = \int_1^5 dy \int_{\frac{y+1}{2}}^{\sqrt{y-1}+1} dx = \int dy [x]_{\frac{y+1}{2}}^{\sqrt{y-1}+1} = \int_1^5 \left(\sqrt{y-1} + 1 - \frac{y+1}{2}\right) dy = \int_1^5 \sqrt{y-1}dy - \frac{1}{2}\int_1^5 (y-1)dy =$$

$$= \left[\frac{2}{3}(y-1)\sqrt{y-1}\right]_1^5 - \left[\frac{(y-1)^2}{4}\right]_1^5 = \frac{16}{3} - 0 - 4 + 0 = \frac{4}{3}.$$

Задача 35. Найти объем тела, ограниченного параболоидом *Z=6-X2-Y2* и конусом $z=\sqrt{x^2+y^2}$ (рис. 14).

Решение. Искомый объем *V* находим с помощью

$$V=\iint\limits_D \left[(6-x^2-y^2)-\sqrt{x^2+y^2}\right]dxdy. \quad (1)$$

Определим область *D*. Исключая из заданных уравнений поверхностей *Z*, получим уравнение контура области *D*:

$$6-x^2-y^2=\sqrt{x^2+y^2};\ (x^2+y^2)+\sqrt{x^2+y^2}-6=0.$$

Откуда

$$\sqrt{x^2+y^2}=2 \text{ и } x^2+y^2=4. \quad (2)$$

Как видно из уравнения (2), область *D* представляет круг с центром в начале координат и радиусом, равным 2.

Чтобы вычислить интеграл (1), перейдем к полярным координатам: *X=RcosJ* и *Y=RsinJ*. Область *D* определяется неравенствами: 0£*J*£2p, 0£*R*£2. Выразим подынтегральное выражение (1) через *R* и *J*. Заменяя *X2+y2* Через *R2* и *Dxdy* через *RdrdJ*, получим

$$V=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(6-r^2-r)rdr=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^2(6r-r^3-r^2)dr=\int_0^{2\pi}d\varphi\left[3r^2-\frac{r^4}{4}-\frac{r^3}{3}\right]_0^2=\frac{16}{3}\int_0^{2\pi}d\varphi=\frac{32}{3}\pi \text{ куб.ед.}$$

Задача 36. Найти функцию *U* (*X, y)*, если ее дифференциал

$$dU=(3x^2+e^{2y})dx+(\sin y+2xe^{2y})dy.$$

Решение. Рассмотрим криволинейный интеграл

$$\int\limits_K (3x^2+e^{2y})dx+(\sin y+2xe^{2y})dy.$$

Так как под знаком криволинейного интеграла имеется полный дифференциал, то этот интеграл не зависит от контура интегрирования. Выберем на плоскости *XOy* три точки: *A* (0;0), *B* (*X*;0) и *M* (*X;y*) и за контур интегрирования *K* примем ломаную *AMB*. На отрезке *AB* *У*=0 и, следовательно, *Dy*=0; на отрезке *BM x=Const* и, следовательно, *DX*=0.

$$U(x,y)=\int\limits_K=\int\limits_{AB}+\int\limits_{BM}=\int_0^x(3x^2+1)dx+\int_0^y(\sin y+2xe^{2y})dy=\left[x^3+x\right]_0^x+\left[-\cos y+xe^{2y}\right]_0^y=$$

$$x^3+x-\cos y+xe^{2y}+1-x=x^3-\cos y+xe^{2y}+C.$$

Тема 7. Теория рядов

Методические рекомендации

Примеры решения типовых задач по теории рядов**Задача.** Найти область сходимости степенного ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n x^n}{2^n\sqrt{n}}.$

Решение. Данный степенной ряд можно записать так:

$$\frac{3x}{2\sqrt{1}}+\frac{3^2x^2}{2^2\sqrt{2}}+\frac{3^3x^3}{2^3\sqrt{3}}+\ldots+\frac{3^nx^n}{2^n\sqrt{n}}+\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n}+1}+\ldots \quad (1)$$

Применяем признак Даламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|-\frac{3^{n+1}x^{n+1}}{2^{n+1}\sqrt{n}+1}\cdot\frac{3^n x^n}{2^n\sqrt{n}}\right| = \frac{3}{2}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n}+1}-x\right| = \frac{3}{2}|x|.$$

Как видно, ряд будет сходиться для тех значений *X*, для которых

$$\frac{3}{2}|x| \prec 1,\ \text{или}\ |x| \prec \frac{2}{3},\ \text{или}\ -\frac{2}{3} \prec x \prec \frac{3}{2}.$$

Выясним вопрос о сходимости ряда на концах интервала.

При $x = -\frac{2}{3}$ ряд (1) примет вид

$$-\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}-\ldots \qquad (2)$$

Ряд (2) является знакочередующимся; его общий член по абсолютному значению стремиться к нулю при *N*®¥. По признаку Лейбница о сходимости знакочередующихся рядов заключаем, что ряд (2) сходится. Следовательно, значение *X*=-2/3 принадлежит области сходимости данного ряда.

Подставив в (1) *X*=2/3, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots \qquad (3)$$

Ряд (3) расходится (для этого достаточно сравнить его с гармоническим рядом). Следовательно, значение *X*=2/3 не принадлежит области сходимости данного ряда. Таким образом, $-\frac{2}{3} \le x \prec \frac{2}{3}$ - область сходимости исследуемого ряда.

Задача. Вычислить интеграл $\int_0^{1/2}\frac{\sin 2x}{x}dx$ с точностью до 0,0001.

Решение. Предварительно представим подынтегральную функцию в виде степенного ряда. Используя известное разложение в степенной ряд функции *Sinx*, будем иметь

$$\sin 2x = 2x - \frac{(2x)^3}{3!}+\frac{(2x)^5}{5!}-\frac{(2x)^7}{7!}+\ldots$$

Тогда

$$\frac{\sin 2x}{x} = 2 - \frac{2^3 x^2}{3!} + \frac{2^5 x^4}{5!} - \frac{2^7 x^6}{7!} + \ldots;$$

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin 2x}{x} dx = \int_0^{1/2} \left(2 - \frac{2^3 x^2}{3!} + \frac{2^5 x^4}{5!} - \frac{2^7 x^6}{7!} + \ldots \right) dx = \left[2x - \frac{2^3}{3!}\frac{x^3}{3} + \frac{2^5}{5!}\frac{x^5}{5} - \frac{2^7}{7!}\frac{x^7}{7} + \ldots \right]_0^{1/2} =$$

$$= 1 - \frac{1}{3!3} + \frac{1}{5!5} - \frac{1}{7!7} + \ldots = 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} - \frac{1}{35280} + \ldots$$

Мы получили знакочередующийся ряд, который удовлетворяет условиям теоремы Лейбница. Так как в полученном ряде четвертый член по абсолютному значению меньше 0,0001, то ограничиваемся только первыми тремя членами. Итак,

$$\int_0^{1/2} \frac{\sin 2x}{x} dx \approx 1 - \frac{1}{18} + \frac{1}{600} \approx 1 - 0{,}0556 + 0{,}0017 \approx 0{,}946.$$

Задача. Разложить в ряд Фурье периодическую функцию *F(X)*, заданную на интервале – периоде (-p, p):

$$f(x) = \begin{cases} -x \text{ при } -\pi \prec x \le 0, \\ 0 \quad \text{при } 0 \prec x \le \pi. \end{cases}$$

Решение. Заданная функция *F(X)* удовлетворяет условиям разложения в ряд Фурье, поэтому имеем равенство

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (1)$$

Где *An* И *Bn* определяются по формулам

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx, \; n = 0,1,2,3,\ldots, \qquad (2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx, \; n = 1,2,3,\ldots, \qquad (3)$$

Положив в (2) *N*=0, получим коэффициент *A0*:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} -x dx + \int_0^{\pi} 0 dx \right] = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x^2 2}{} \right]_{-\pi}^{0} = -\frac{\pi}{2}.$$

Используя формулу (2) и заданную функцию, имеем

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \left[\int_{-\pi}^{0} -x \cos nx dx + \int_0^{\pi} 0 \cos nx dx \right] = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} -x \cos nx dx = -\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{0} x \cos nx dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$a_n = -\frac{1}{\pi}\left[x\frac{\sin nx}{n}+\frac{\cos nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi}\left[0+\frac{1}{n^2}-0-\frac{\cos(-n\pi)}{n^2}\right] = -\frac{1}{\pi}\frac{1-\cos n\pi}{n^2} = -\frac{1}{\pi}\frac{2\sin^2(n\pi/2)}{n^2} =$$

$$= \begin{cases} -2/(\pi n^2) & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } n \text{ четном} \end{cases}$$

Определим коэффициенты *Bn*:

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\pi}^{0} -x\sin nx dx + \int_{0}^{\pi} 0\sin nx dx\right] = -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin nx dx.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$b_n = -\frac{1}{\pi}\left[-x\frac{\cos nx}{a}+\frac{\sin nx}{n^2}\right]_{-\pi}^{0} = -\frac{1}{\pi}\left(0+0-\frac{\pi\cos(-n\pi)}{n}-0\right) =$$

$$\begin{cases} -1/n & \text{при } n \text{ нечетном,} \\ 1/n & \text{при } n \text{ четном.} \end{cases}$$

Подставляя найденные значения коэффициентов Фурье в (1), получаем

$$f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right) - \left(\frac{\sin x}{1}-\frac{\sin 2x}{2}+\frac{\sin 3x}{3}-\frac{\sin 4x}{4}+\ldots\right)$$

Задача. Функцию $f(x) = \frac{\pi}{4} - \frac{x}{2}$ в интервале (0;p) разложить в ряд косинусов.

Решение. Так как по условию ряд заданной функции должен содержать только косинусы кратных дуг, то продолжим функцию в интервале (-p;0) четным образом. В результате будет получена четная функция, которая совпадает с заданной на интервале (0;p). Известно, что ряд Фурье для четной функции имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx, \qquad (1)$$

Где

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos nx dx,\ n = 0,1,2,3,\ldots \qquad (2)$$

При *N*=0 получаем:

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)dx=\frac{1}{2\pi}\left[\pi x-x^2\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(\pi^2-\pi^2\right)=0,\ a_0=0;$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\cos nx dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(\pi-2x)\cos nx dx.$$

Интегрируем по частям:

$$a_n=\frac{1}{2\pi}\left[(\pi-2x)\frac{\sin nx}{n}-\frac{2\cos nx}{n^2}\right]_0^{\pi}=\frac{1}{2\pi}\left(0-\frac{2\cos n\pi}{n^2}-0+\frac{2}{n^2}\right)=\frac{1}{\pi n^2}(1-\cos n\pi)=$$

$$=\frac{2}{\pi n}\sin^2\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}2/(\pi n^2) & \text{при } n \text{ нечетном,}\\ 0 & \text{при } n \text{ четном.}\end{cases}$$

Подставив найденные значения коэффициента Фурье в (1), получим

$$f(x)=\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}=\frac{2}{\pi}\left(\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos 3x}{3^2}+\frac{\cos 5x}{5^2}+\ldots\right).$$

Тема Матрица и определители

Методические рекомендации

Матрицы. Операции над матрицами. Определение матрицы

Матрицей А Размера $m\times n$
Называется таблица из $T\cdot n$ чисел

$$A=\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}\ldots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}a_{m2}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}$$

Часто для краткости пишут *A* = ||*Aij*||. Числа, из которых состоит матрица, называются *Элементами матрицы*. Индексы у элементов матрицы указывают расположение этого элемента в таблице: первый индекс – номер строки, в которой находится элемент, а второй – номер столбца. Например, элемент *A*23 находится на пересечении второй строки и третьего столбца:

$$\begin{pmatrix}a_{11}a_{12}a_{13}\ldots a_{1n}\\ a_{21}a_{22}\boxed{a_{23}}\ldots a_{2n}\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\\ a_{m1}a_{m2}a_{m3}\ldots a_{mn}\end{pmatrix}$$

Элементы *A*11, *A*22, *A*33, … называются *Главной диагональю* матрицы

$$\begin{pmatrix}a_{11}\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots a_{22}\ldots\ldots\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots a_{33}\ldots\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\end{pmatrix}$$

Если матрица А имеет размер $n\times n$, то такую матрицу называют *Квадратной матрицей порядка П*.

Две матрицы одинакового размера *A* = ||*Aij*|| и *B* = ||*Bij*|| называют *Равными* (при этом пишут *A* = *B*), если

$$a_{ij}=b_{ij};i=1,\ldots,m;\ j=1,\ldots,n.$$

Упражнение 1.

$$A = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{-1} & \mathbf{2} \\ \mathbf{3} & \mathbf{4} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}.$$

Найти *A*12 и *A*23.

Решение.

Элемент *A*12 располагается в первой строке и втором столбце, то есть это второй элемент первой строки: *A*12 = -1.

Соответственно *A*23 – элемент, стоящий во второй строке и в третьем столбце;

*A*23 = -3.

Упражнение 2.

Даны матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \alpha^2 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ \beta & 3 \end{pmatrix}.$$

При каких *A* и *B A=B*?

Решение.

У равных матриц должны быть равными соответствующие элементы. Для элементов, заданных численно, это условие выполняется: *A*12 = *B*12 = 1,

*A*22 = *B*22 = 3. Поскольку *B*11 = 4, а *A*21 = -2, для равенства матриц *A* и *B* должны выполняться условия:

$$\begin{cases} \alpha^2 = 4 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

Следовательно, *A* = ±2, *B* = -2.

Ответ: *A* = ±2, *B* = -2

Тема Системы линейных уравнений

Методические рекомендации

Системы линейных алгебраических уравнений

Система уравнений вида

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1,$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \quad (1)$$

Называется *Системой линейных алгебраических уравнений.* Числа *Aij,*

I = 1,...,*M*, *J* = 1,..., *N*, называются *Коэффициентами системы*, *Bi*, *I* = 1,..., *M*, – *Свободными членами*, а *Xj*, *J* = 1,..., *N*, – *Неизвестными*. Требуется по заданным коэффициентам системы и свободным членам найти

Решение системы, т. е. все такие числа *X*1,…, *Xn*, которые удовлетворяют равенствам (4.1). Если таких чисел не существует, то систему называют *Несовместной*, в противном случае (т. е. если существует хотя бы одно решение системы) ее называют *Совместной*.

Положим

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \ldots \\ b_m \end{pmatrix}, \; x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Матрица *A* называется *Матрицей системы*, *B* – *Столбцом свободных членов*, *X* – *Столбцом неизвестных*. Из определения умножения матриц вытекает, что равенства (4.1) могут быть записаны в виде

$Ax = b$, (2)

Называемым *Матричным* видом системыПримеры решения задач по теме «Системы уравнений общего вида. Метод Гаусса»

Задача 1.

Указать базисный минор матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Указание

Определите вначале ранг матрицы *A*, а затем найдите ненулевой минор, порядок которого равен *R*(*A*).

Решение

Определим *R*(*A*). Вторая и четвертая строки *A* равны, поэтому после вычитания из 4-й строки 2-й получаем:

$$A \square \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим минор полученной матрицы, составленный из первых трех столбцов:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-2) = -4 \neq 0.$$

Таким образом, найден минор максимально возможного (3-го) порядка, не равный нулю. Следовательно, ранг матрицы *A* равен рангу преобразованной матрицы, то есть равен 3, а рассмотренный минор является базисным.

Ответ: $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}.$

Задача 2.

Определить количество решений системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 5 \\ x_1 - x_2 + 5x_3 - 8x_4 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 4x_4 = 1 \end{cases}.$$

Указание

Сравните ранги матрицы системы и расширенной матрицы.

Решение

Сравним ранги матрицы системы

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 1 & -1 & 5 & -8 \\ 3 & 2 & 4 & -4 \end{pmatrix}$$

И расширенной матрицы

$$A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 3 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Для удобства вычислений будем искать ранг матрицы $A1$, отделив ее последний столбец вертикальной чертой. Тогда столбцы, стоящие слева от черты, образуют матрицу A, и мы одновременно найдем ранги обеих матриц.

$$A1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -4 & 1 \end{array}\right).$$

Вычтем из второй строки удвоенную первую, а из третьей – первую, умноженную на 3:

$$A1 \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & 1 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & -1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 5 & -8 & 2 \\ 0 & 5 & -11 & 20 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Таким образом, $R(A) = 2$, а $R(A1) = 3$, следовательно, система не имеет решений.

Ответ: система несовместна.

Задача 3.

Найти общее решение линейной системы

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + 5x_5 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 - x_5 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 8x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 + 9x_5 = 4 \end{cases}.$$

Указание

Убедившись в том, что система совместна, определите базисные и свободные неизвестные и выразите базисные неизвестные через свободные.

Решение

Найдем $R(A)$ и $R(A1)$:

$$A_1 = \left(\begin{array}{ccccc|c} 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 3 & -1 & 2 & -1 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 3 & -1 & -2 \\ 8 & -1 & 1 & 1 & 9 & 4 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 15 & -21 & 33 & -39 & -36 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & 6 & 5 \\ 0 & 5 & -7 & 11 & -13 & -12 \end{array}\right).$$

Итак, $R = R(A) = R(A1) = 2$, а число неизвестных $П = 5$. Следовательно, $R < N$, и система имеет бесконечно много решений (совместна, но не определена).

Число базисных неизвестных равно *R*, то есть двум. Выберем в качестве базисных неизвестных *X*1 и *X*2, коэффициенты при которых входят в базисный минор преобразованной матрицы *A*: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 5 \end{vmatrix}$.

Соответственно *X*3, *X*4, *X*5 – свободные неизвестные.

Запишем систему, равносильную исходной, коэффициентами в которой являются элементы полученной матрицы:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 + 6x_5 = 5 \\ 5x_2 - 7x_3 + 11x_4 - 13x_5 = -12 \end{cases}$$

И выразим базисные неизвестные через свободные:

$$\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5} \\ x_2 = \dfrac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5} \end{cases}.$$

Получено общее решение системы. Одно из частных решений можно найти, положив все свободные неизвестные равными нулю: *X*3 = *X*4 = *X*5 = 0. Тогда

$$x_1 = -\frac{1}{5},\ x_2 = -\frac{12}{5}.$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{x_3 + 2x_4 + 4x_5 - 1}{5} \\ x_2 = \dfrac{7x_3 - 11x_4 + 13x_5 - 12}{5} \end{cases}.$

Задача 4.

Найти общее решение системы, выразив в ответе первые неизвестные через последние:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 5 \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 = 3 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 + 3x_4 = -1 \end{cases}.$$

Указание

Приведите расширенную матрицу к виду

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -11 \end{array}\right).$$

Решение

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & 5 & -2 & 3 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \end{array}\right) \square \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 5 \\ 0 & -7 & 8 & -5 & -12 \\ 0 & -3 & 0 & 1 & -11 \end{array}\right).$$

Минор, состоящий из первых трех столбцов полученной матрицы,

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & -3 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot \begin{vmatrix} -7 & 8 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -24 \neq 0,$$

Поэтому $R(A) = R(A1) = 3$, выбранный минор является базисным, а $X1$, $X2$, $X3$, коэффициенты при которых составляют базисный минор, – базисными неизвестными. Тогда свободное неизвестное – $X4$, и система, равносильная исходной, имеет вид:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 - x_4 \\ -7x_2 + 8x_3 = 5x_4 - 12, \\ \quad -3x_2 = -x_4 - 11 \end{cases}$$

Откуда $\begin{cases} x_1 = -\dfrac{6x_4 + 5}{8} \\ x_2 = \dfrac{x_4 + 11}{3} \\ x_3 = \dfrac{22x_4 + 41}{24} \end{cases}$.

Ответ: $x_1 = -\dfrac{6x_4 + 5}{8}$; $x_2 = \dfrac{x_4 + 11}{3}$; $x_3 = \dfrac{22x_4 + 41}{24}$.

Задача 5.

Найти фундаментальную систему решений однородной линейной системы

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 4x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 + 5x_2 - x_3 - x_4 - x_5 = 0 \\ x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 5x_4 = 0 \end{cases}.$$

Указание

Количество решений, образующих фундаментальную систему, равно числу
Свободных неизвестных. Задайте свободным неизвестным значения 1,0,0; 0,1,0; 0,0,1 и вычислите соответствующие значения базисных неизвестных.

Решение

Количество решений, образующих фундаментальную систему, равно числу Свободных неизвестных.

Матрица $A1$ отличается от матрицы A только добавлением нулевого столбца свободных членов, поэтому все ее ненулевые миноры являются минорами матрицы A, то есть $R(A) = R(A1)$. Найдем $R(A)$:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -6 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix}.$$

Выберем в качестве базисного минора $\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 5 \neq 0.$

Значит, $R(A) = 2$. Пусть $X4$, $X5$ – базисные неизвестные, $X1$, $X2$, $X3$ – свободные неизвестные. Запишем для них новую систему:

$$\begin{cases} 4x_4 - x_5 = -2x_1 + x_2 - 3x_3 \\ 5x_4 = -x_1 + 6x_2 - 4x_3 \end{cases},$$

Откуда

$$\begin{cases} x_4 = \dfrac{-x_1 + 6x_2 - 4x_3}{5} \\ x_5 = \dfrac{6x_1 + 19x_2 - x_3}{5} \end{cases}.$$

Фундаментальная система решений состоит из трех столбцов. Рассмотрим три набора значений свободных неизвестных:

1) $X1 = 1$, $X2 = X3 = 0$.

Тогда $X4 = -0{,}2$, $X5 = 1{,}2$, и решение можно записать в виде столбца

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}.$$

2) $X1 = 0$, $X2 = 1$, $X3 = 0$.

При этом $X4 = 1{,}2$, $X5 = 3{,}8$, и следующее решение системы имеет вид

$$X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1{,}2 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}.$$

3) $X1 = X2 = 0$, $X3 = 1$. Отсюда $X4 = -0{,}8$, $X5 = -0{,}2$, и последний столбец

$$X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0{,}8 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}.$$

Фундаментальная система решений, построенная при таком выборе свободных неизвестных, называется ***Нормальной****. Поскольку столбцы свободных неизвестных* $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ *линейно независимы, это гарантирует линейную независимость решений X1, X2, X3.*

Итак, в качестве фундаментальной системы решений можно выбрать

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1{,}2 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0{,}8 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}.$$

При этом любое решение данной системы имеет вид: $X = c1X1 + C2X2 + C3X3$, где $C1$, $C2$, $C3$ – произвольные постоянные. Эта формула задает общее решение системы.

Ответ: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -0{,}2 \\ 1{,}2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1{,}2 \\ 3{,}8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -0{,}8 \\ -0{,}2 \end{pmatrix}.$

Задача 6.

Составить однородную систему из двух уравнений, для которой столбцы

$$X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Образуют фундаментальную систему решений.

Указание

Пусть искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \end{cases}.$$

Подставьте вместо $X1, \ldots, X5$ элементы столбцов $X1$, $X2$, $X3$ и решите полученную систему уравнений для коэффициентов Aij.

Решение

Существует бесконечно много систем однородных линейных уравнений, для каждой из которых фундаментальная система решений имеет указанный вид. Число уравнений в таких системах может быть различным. При этом можно указать их наименьшее требуемое количество, а увеличивать их число можно неограниченно.

Определим вначале, из какого наименьшего числа уравнений может состоять такая система. Число элементов каждого столбца равно пяти, следовательно, в системе пять неизвестных ($П = 5$). Количество столбцов, составляющих фундаментальную систему, равно трем, то есть $N - R = 3$, поэтому $R = 5 - 3 = 2$. Значит, матрица A должна иметь по крайней мере 2 строки. Следовательно, система уравнений с заданной фундаментальной системой решений может состоять из двух и более уравнений.

Пусть искомая система имеет вид:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 + a_{15}x_5 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 + a_{25}x_5 = 0 \end{cases}.$$

Подставим вместо $X1, \ldots, X5$ элементы столбцов $X1$, $X2$, $X3$. Получим:

$$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} - a_{14} + a_{15} = 0 \\ a_{21} + a_{22} + 2a_{23} - a_{24} + a_{25} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_{12} + 3a_{13} + a_{14} = 0 \\ a_{22} + 3a_{23} + a_{24} = 0 \end{cases},$$

$$\begin{cases} a_{11} - a_{12} + 2a_{15} = 0 \\ a_{21} - a_{22} + 2a_{25} = 0 \end{cases}.$$

Разобьем полученные 6 уравнений на две системы, одна из которых содержит *A*1*I*, а вторая – *A*2*I*:

$$\mathbf{1)}\ \begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} - a_{14} + a_{15} = 0 \\ a_{12} + 3a_{13} + a_{14} = 0 \\ a_{11} - a_{12} + 2a_{15} = 0 \end{cases}.$$

Найдем какое-либо частное решение этой системы. Приведем ее матрицу к треугольному виду:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \square$$

$$\square \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 1 \end{pmatrix},$$

Откуда $$\begin{cases} a_{11} + a_{12} + 2a_{13} = a_{14} - a_{15} \\ a_{12} + 3a_{13} = -a_{14} \\ 4a_{13} = -3a_{14} - a_{15} \end{cases}.$$

Следовательно, $$\begin{cases} a_{11} = \dfrac{5a_{14} - 5a_{15}}{4} \\ a_{12} = \dfrac{5a_{14} + 3a_{15}}{4} \\ a_{13} = \dfrac{-3a_{14} - a_{15}}{4} \end{cases}.$$

Выберем *A*14 = *A*15 = 4, тогда *A*11 = 0, *A*12 = 8, *A*13 = -4.

2) Так же выглядит общее решение системы для *A*2*I*:

$$\begin{cases} a_{21} = \dfrac{5a_{24} - 5a_{25}}{4} \\ a_{22} = \dfrac{5a_{24} + 3a_{25}}{4} \\ a_{23} = \dfrac{-3a_{24} - a_{25}}{4} \end{cases}.$$

Выберем свободные неизвестные так, чтобы получить решение, линейно независимое с предыдущим.

Пусть *A*24 = 4, *A*25 = 0, тогда *A*21 = 5, *A*22 = 5, *A*23 = -3.

Итак, используя найденные значения коэффициентов, можно составить линейную однородную систему:

$$\begin{cases} 8x_2-4x_3+4x_4+4x_5=0 \\ 5x_1+5x_2-3x_3+4x_4=0 \end{cases},$$

Фундаментальная система решений которой имеет вид, приведенный в условии задачи.

Ответ: $\begin{cases} 8x_2-4x_3+4x_4+4x_5=0 \\ 5x_1+5x_2-3x_3+4x_4=0 \end{cases}.$

Задача 7.

Найти общее решение неоднородной линейной системы

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=2 \\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+5x_5=3 \\ 3x_1+4x_3-3x_4+6x_5=5 \end{cases}$$

С помощью фундаментальной системы решений соответствующей однородной системы.

Указание

Убедитесь в том, что система совместна. Затем составьте соответствующую однородную систему и найдите для нее фундаментальную систему решений. Далее используйте то, что общее решение неоднородной системы линейных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Решение

Убедимся в том, что система совместна:

$$A_1=\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & -4 & 5 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right)\sim$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)\sim\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 4 & -3 & 6 & 5 \end{array}\right).$$

Итак, $R(A) = R(A1) = 2$ – система совместна.

Составим по преобразованной матрице однородную систему:

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=0 \\ 3x_1+4x_3-3x_4+6x_5=0 \end{cases}$$

И найдем для нее фундаментальную систему решений:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-x_3-x_4-x_5 \\ 3x_1=-4x_3+3x_4-6x_5 \end{cases},$$

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{-4x_3+3x_4-6x_5}{3} \\ x_2=\dfrac{x_3-6x_4+3x_5}{3} \end{cases}.$$

Фундаментальная система решений может быть выбрана так:

$$X_1 = \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Общее решение неоднородной системы линейных уравнений является суммой общего решения соответствующей однородной системы и частного решения неоднородной системы.

Теперь найдем какое-нибудь частное решение неоднородной системы

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 2 \\ 3x_1 + 4x_3 - 3x_4 + 6x_5 = 5 \end{cases}.$$

Положим $X3 = X4 = X5 = 0$, тогда $x_1 = \frac{5}{3}, \ x_2 = \frac{1}{3}$. Следовательно,

$$X_{частн} = \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

и общее решение системы имеет вид:

$X = c1X1 + C2X2 + C3X3 + X$*частн*, где $C1$, $C2$, $C3$ – произвольные постоянные.

$$X = c_1 \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{5}{3} \\ \frac{1}{3} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ответ:

Задача 8.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 3x - y + 2z = 9 \\ x + 4y + z = 4 \\ 2x - 3y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Указание

Поменяйте местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при X равнялся единице, а затем исключите X из второго и третьего уравнений.

Решение

Метод Гаусса заключается в последовательном исключении неизвестных из уравнений системы. Для удобства его применения поменяем местами 1-е и 2-е уравнения, чтобы в первом уравнении коэффициент при X равнялся единице:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ 3x-y+2z=9 \\ 2x-3y+3z=11 \end{cases}.$$

Теперь исключим X из второго и третьего уравнений. Для этого вычтем из второго уравнения первое, умноженное на 3, а из третьего – первое, умноженное на 2:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ -13y-z=-3 \\ -11y+z=3 \end{cases}.$$

Далее можно легко исключить Z из третьего уравнения, если прибавить к нему второе:

$$\begin{cases} x+4y+z=4 \\ -13y-z=-3 \\ -24y=0 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения получаем, что $Y = 0$. Подставляя это значение в первое и второе уравнения, находим остальные неизвестные: $Z = 3$, $X = 1$.

Ответ: $X = 1$, $Y = 0$, $Z = 3$.

При применении метода Гаусса совсем не обязательно приводить систему к «классическому» треугольному виду:

$$\begin{cases} a_1x+b_1y+c_1z=d_1 \\ b_2y+c_2z=d_2 \\ c_3z=d_3 \end{cases}.$$

Достаточно, чтобы матрица коэффициентов, например, системы трех уравнений с тремя неизвестными содержала два нуля в одном столбце и одновременно два нуля в одной строке, причем один из нулей стоял на пересечении этих строки и столбца.

Задача 9.

Решить систему методом Гаусса:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1-x_2-3x_4=2 \\ 3x_1-x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6 \end{cases}.$$

Указание

Исключите $X2$ из 2-го и 4-го уравнений, используя 1-е уравнение, а затем вычтите из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить $X3$.

Решение

Исключим $X2$ из 2-го и 4-го уравнений. Для этого из 2-го уравнения вычтем 1-е, а к 4-му прибавим 1-е, умноженное на 2:

$$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ -x_3-2x_4=1 \\ 3x_1-x_3+x_4=-3 \\ 6x_1+3x_4=-4 \end{cases}.$$

Вычтем из 3-го уравнения 2-е, чтобы исключить $X3$:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ 6x_1 + 3x_4 = -4 \end{cases}.$$

Теперь вычтем из 4-го уравнения удвоенное 3-е:

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1 \\ -x_3 - 2x_4 = 1 \\ 3x_1 + 3x_4 = -4 \\ -3x_4 = 4 \end{cases}.$$

Из последнего уравнения находим $x_4 = -\frac{4}{3}$. Тогда из 3-го уравнения $X1 = 0$, из 2-го $x_3 = \frac{5}{3}$, из 1-го $X2 = 2$.

Ответ: $x_1 = 0,\ x_2 = 2,\ x_3 = \frac{5}{3},\ x_4 = -\frac{4}{3}.$

3. Рекомендуемая литература

Основная литература

1. Григорьев, В.П. Элементы высшей математики [Текст]: учеб.для спо / В.Григорьев, Ю.Дубинский, Т.Сабурова. - М.: Академия, 2017. - 320с.

Дополнительная литература:

1. Григорьев, В.П. Элементы высшей математики [Текст]: учеб.для спо / В.П.Григорьев, Ю.А.Дубинский. - М.: Академия, 2004. - 320с.

Электронные образовательные ресурсы

1. Баврин, И.И. Математика для технических колледжей и техникумов: учебник и практикум для спо / И.И. Баврин. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Издательство Юрайт, 2020. — 397 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/451978 (дата обращения: 15.09.2020).
2. Бурмистрова, Е.Б. Линейная алгебра: учебник и практикум для спо / Е.Б. Бурмистрова, С.Г. Лобанов. — Москва: Юрайт, 2019. — 421 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/427070 (дата обращения: 15.09.2020).
3. Кашапова, Ф.Р. Высшая математика. Общая алгебра в задачах : учебное пособие для спо / Ф.Р. Кашапова, И.А. Кашапов, Т.Н. Фоменко. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, 2020. — 128 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/454329 (дата обращения: 15.09.2020).
4. Муратова, Т.В. Дифференциальные уравнения: учебник и практикум для спо / Т.В. Муратова. — Москва: Юрайт, 2020. — 435 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/452620 (дата обращения: 15.09.2020).
5. Фоменко, Т.Н. Высшая математика. Общая алгебра. Элементы тензорной алгебры: учебник и практикум для спо / Т.Н. Фоменко. — Москва: Юрайт, 2020. — 121 с. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/454328 (дата обращения: 15.09.2020).
6. Шипачев, В. С. Математика: учебник и практикум для спо / В.С. Шипачев ; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва : Издательство Юрайт, 2020. — 447 с.

— Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: https://urait.ru/bcode/459024 (дата обращения: 15.09.2020).