

Документ подписан простой электронной подписью
Информация о владельце:
ФИО: Усынин Максим Валерьевич
Должность: Ректор
Дата подписания: 04.06.2022 16:49:58
Уникальный программный ключ:
f498e59e83f65dd7c3ce7bb8a25cbbab033e0c36

**Частное образовательное учреждение высшего образования
«Международный Институт Дизайна и Сервиса»
(ЧОУВО МИДиС)**

Кафедра математики и информатики

**МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
ПО ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОМУ УЧЕБНОМУ ПРЕДМЕТУ
УПВ.01 МАТЕМАТИКА**

Специальность:
43.02.13 Технология парикмахерского искусства

Уровень образования обучающихся:
Основное общее образование

Вид подготовки:
Базовый

Методические рекомендации по общеобразовательному учебному предмету УПВ.01 Математика разработаны на основе федерального государственного образовательного стандарта среднего профессионального образования по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование, утверждено приказом Министерства образования и науки РФ от 9 декабря 2016 года № 1547 с учетом требований федерального государственного образовательного стандарта среднего общего образования (утвержденного приказом Министерства образования и науки РФ от 17 мая 2012 г. № 413; с изменениями и дополнениями) и рабочей программы общеобразовательного учебного предмета УПВ.01 Математика.

Автор-составитель: Писаренко И.В.

Методические рекомендации по общеобразовательному учебному предмету УПВ.01 Математика рассмотрены и одобрены на заседании кафедры математики и информатики, протокол № 10 от 30.05.2022 г.

Заведующий кафедрой математики и информатики

Л.Ю. Овсяницкая

СОДЕРЖАНИЕ

1.Пояснительная записка.....	4
2.Методические рекомендации по темам.....	6
3.Рекомендуемая литература.....	44

1. Пояснительная записка

Методические рекомендации составлены в соответствии с рабочей программой общеобразовательного учебного предмета УПВ.01 Математика и предназначены для реализации основной профессиональной образовательной программы среднего профессионального образования (далее – образовательной программы) по специальности 09.02.07 Информационные системы и программирование.

Целями методических указаний по общеобразовательному учебному предмету УПВ.01 Математика являются:

- систематизация и закрепления полученных теоретических знаний;
- углубление и расширение теоретических знаний;
- развитие познавательных способностей и активности студентов, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирование самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

В методических рекомендациях изложены рекомендации к темам, приведены примерные задания для обучающихся, перечень литературы, рекомендуемой для выполнения заданий.

В результате освоения общеобразовательного учебного предмета УПВ.01 Математика обучающийся должен сформировать следующие результаты:

личностные:

- сформированность представлений о математике как универсальном языке науки, средстве моделирования явлений и процессов, идеях и методах математики;
- понимание значимости математики для научно-технического прогресса, сформированность отношения к математике как к части общечеловеческой культуры через знакомство с историей развития математики, эволюцией математических идей;
- развитие логического мышления, пространственного воображения, алгоритмической культуры, критичности мышления на уровне, необходимом для будущей профессиональной деятельности, для продолжения образования и самообразования;
- овладение математическими знаниями и умениями, необходимыми в повседневной жизни, для освоения смежных естественнонаучных дисциплин и дисциплин профессионального цикла, для получения образования в областях, не требующих углубленной математической подготовки;
- готовность и способность к образованию, в том числе самообразованию, на протяжении всей жизни; сознательное отношение к непрерывному образованию как условию успешной профессиональной и общественной деятельности;
- готовность и способность к самостоятельной творческой и ответственной деятельности;
- готовность к коллективной работе, сотрудничеству со сверстниками в образовательной, общественно полезной, учебно-исследовательской, проектной и других видах деятельности;
- отношение к профессиональной деятельности как возможности участия в решении личных, общественных, государственных, общенациональных проблем;

метапредметные:

- умение самостоятельно определять цели деятельности и составлять планы деятельности; самостоятельно осуществлять, контролировать и корректировать деятельность; использовать все возможные ресурсы для достижения поставленных целей и реализации планов деятельности; выбирать успешные стратегии в различных ситуациях;
- умение продуктивно общаться и взаимодействовать в процессе совместной деятельности, учитывать позиции других участников деятельности, эффективно разрешать конфликты;

- владение навыками познавательной, учебно-исследовательской и проектной деятельности, навыками разрешения проблем; способность и готовность к самостоятельному поиску методов решения практических задач, применению различных методов познания;
- готовность и способность к самостоятельной информационно-познавательной деятельности, включая умение ориентироваться в различных источниках информации, критически оценивать и интерпретировать информацию, получаемую из различных источников;
- владение языковыми средствами: умение ясно, логично и точно излагать свою точку зрения, использовать адекватные языковые средства;
- владение навыками познавательной рефлексии как осознания совершаемых действий и мыслительных процессов, их результатов и оснований, границ своего знания и незнания, новых познавательных задач и средств для их достижения;
- целеустремленность в поисках и принятии решений, сообразительность и интуиция, развитость пространственных представлений; способность воспринимать красоту и гармонию мира;

предметные:

- сформированность представлений о математике как части мировой культуры и месте математики в современной цивилизации, способах описания явлений реального мира на математическом языке;
- сформированность представлений о математических понятиях как важнейших математических моделях, позволяющих описать и изучать разные процессы и явления; понимание возможности и аксиоматического построения математических теорий;
- владение методами доказательств и алгоритмов решения, умение их применять, проводить доказательные рассуждения в ходе решения задач;
- владение стандартными приемами решения рациональных и иррациональных, показательных, степенных, тригонометрических уравнений и неравенств, их систем; использование готовых компьютерных программ, в том числе для поиска пути решения и иллюстрации решения управлений и неравенств;
- сформированность представлений об основных понятиях математического анализа и их свойствах, владение умением характеризовать поведение функций, использование полученных знаний для описания и анализа реальных зависимостей ;
- владение основными понятиями о плоских и пространственных геометрических фигурах, их основных свойствах; сформированность умения распознавать геометрические фигуры на чертежах, моделях и в реальном мире; применение изученных свойств геометрических фигур и формул для решения геометрических задач и задач с практическим содержанием;
- сформированность представлений о процессах и явлениях, имеющих вероятностный характер, статистических закономерностях в реальном мире, основных понятиях элементарной теории вероятностей; умение находить и оценивать вероятности наступления событий в простейших практических ситуациях и основные характеристики случайных величин;
- владение навыками использования готовых компьютерных программ при решении задач.

Формы и методы работы студентов:

- выборочная/фронтальная проверка решений задач;
- заслушивание сообщений;
- защита презентаций; подготовка к итоговой контрольной работе за семестр;
- подготовка к экзамену.

Критерии оценки результатов студентов:

- «отлично», если работа выполнена в полном объеме с соблюдением необходимой последовательности. Обучающиеся работают полностью самостоятельно: подбирают

необходимые для выполнения предлагаемых работ источники знаний, показывают необходимые для проведения практической работы теоретические знания, практические умения и навыки.

– «хорошо», если работа выполняется обучающимися в полном объёме и самостоятельно. Допускаются отклонения от необходимой последовательности выполнения, не влияющие на правильность конечного результата. Работа показывает знание обучающимися основного теоретического материала и овладение умениями, необходимыми для самостоятельного выполнения работы. Могут быть неточности и небрежность в оформлении результатов работы.

– «удовлетворительно», если работа выполняется и оформляется обучающимися при сторонней помощи. На выполнение работы затрачивается много времени (можно дать возможность доделать работу дома). Обучающиеся показывают знания теоретического материала, но испытывают затруднение при самостоятельной работе.

– «неудовлетворительно» выставляется в том случае, когда обучающиеся не подготовлены к выполнению работы. Полученные результаты не позволяют сделать правильных выводов и полностью расходятся с поставленной целью. Показывается плохое знание теоретического материала и отсутствие необходимых умений.

2. Методические рекомендации по темам

Тема 1. Развитие понятия о числе

Задание. Подготовить сообщение на тему «Развитие понятия о числе»

Методические рекомендации

При подготовке сообщения (доклада) целесообразно воспользоваться следующими рекомендациями:

- Уясните для себя суть темы, которая вам предложена.
- Подберите необходимую литературу (старайтесь пользоваться несколькими источниками для более полного получения информации).
- Тщательно изучите материал учебника по данной теме, чтобы легче ориентироваться в необходимой вам литературе и не сделать элементарных ошибок.
- Изучите подобранный материал (по возможности работайте карандашом), выделяя самое главное по ходу чтения.
- Составьте план сообщения.

Напишите текст доклада

Задание. Решить задачи

1. Запишите число в стандартном виде:

730000000; 0,0000025; 37000000; 0,000000052; $0,42 \cdot 10^{-4}$; $52,7 \cdot 10^5$ 0,24
 $\cdot 10^{-3}$; $75,2 \cdot 10^4$ 3800000; 0,000015 41000000; 0,000006. 1700000;
 0,000061. 12000000; 0,000156.

2. Представьте обыкновенную дробь в виде десятичной периодической дроби:

$\frac{13}{15}$; $\frac{35}{111}$; $\frac{3}{11}$; $\frac{95}{333}$.

3. Найдите значение дроби: $\frac{12,8 : 0,64 + 3,05 : 0,05}{8\frac{2}{3} : 1\frac{4}{9} - 1}$ $\frac{203,4 : 9 - (5,39 - 7,39)}{\frac{3}{14} * \frac{7}{9} - \frac{1}{3}}$

4. Вычислить: $\left(5\frac{8}{9} - 3\frac{11}{12}\right) \cdot \frac{18}{71} - 7\frac{5}{6} : 15\frac{2}{3}$. $(\sqrt{50} + 6\sqrt{8})\sqrt{2}$.

$0,364 : \frac{7}{25} + \frac{5}{16} : 0,125 + 2\frac{1}{2} * 0,8$. $(\sqrt{3} - 1)^2 - (2\sqrt{3} + 1)^2$. $\frac{5,48 + 8,02}{(7,97 + 8,77) \div 3,72}$.

$(\sqrt[3]{7} - \sqrt[3]{4})(\sqrt[3]{49} + \sqrt[3]{28} + \sqrt[3]{16})$. $\frac{20,88 \div 18 + 45 \div 0,36}{19,59 + 11,95}$. $(\sqrt[3]{4} - \sqrt[3]{10} + \sqrt[3]{25})(\sqrt[3]{2} + \sqrt[3]{5})$

Методические рекомендации

Для решения примеров по данной теме необходимо воспользоваться

1. правилом записи числа в стандартном виде

Очень большие и очень малые числа принято записывать в стандартном виде: $a \cdot 10^n$, где $1 \leq a < 10$ и n (натуральное или целое) – есть порядок числа, записанного в стандартном виде.

Например, $345,7 = 3,457 \cdot 10^2$; $123456 = 1,23456 \cdot 10^5$; $0,000345 = 3,45 \cdot 10^{-4}$.

2. Перевод обыкновенной дроби в десятичную осуществляется делением числителя на

знаменатель уголком. Например $\frac{45}{11} = 4, (09)$ $\frac{41}{99} = 0, (41)$

$$\begin{array}{r} 41 \overline{) 99} \\ \underline{0} \\ 410 \\ \underline{396} \\ 140 \\ \underline{99} \\ 410 \\ \underline{396} \\ 140 \\ \underline{99} \\ 410 \\ \dots \end{array} \quad \begin{array}{r} 45 \overline{) 11} \\ \underline{44} \\ 10 \\ \underline{0} \\ 100 \\ \underline{99} \\ 10 \\ \underline{0} \\ 100 \\ \underline{99} \\ 10 \\ \dots \end{array}$$

Тема 2 Корни, степени и логарифмы

Задание. Решить задачи.

Задание: вычислить.

- $(2\sqrt{2})^{\frac{4}{3}}$
- $-5,3^0 \cdot 8^{\frac{1}{3}}$
- $\left(\frac{1}{225}\right)^{-\frac{1}{2}}$
- $(-343)^{-\frac{1}{3}}$
- $\left(\frac{1}{16}\right)^{0,75}$
- $((-8,7)^3)^0$
- $\left(1\frac{61}{64}\right)^{-\frac{1}{3}}$
- $(4\sqrt{2})^{\frac{2}{5}}$
- $\frac{1}{3 \cdot 16^{0,5} + 2 \cdot 9^{0,5}}$
- $\sqrt[3]{100^{1,5}}$
- $\left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{2}{3}}$
- $\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}$
- $\left(\frac{1}{256}\right)^{-\frac{3}{4}}$
- $\frac{1}{\sqrt[3]{8}}$
- $\left(10000^{-\frac{3}{4}}\right)^{-1}$
- $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{343}\right)^{-1}}$
- $64^{-\frac{2}{3}}$
- $\sqrt[3]{169^{-1}}$
- $(49^{-1})^{\frac{3}{2}}$
- $\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}\right)^{\frac{1}{3}}$
- $\frac{1}{\sqrt[2]{4\sqrt{2}}}$
- $\left(\frac{27}{4^{-1,5}}\right)^{\frac{1}{3}}$
- $\sqrt[0,5]{0,1^{-1}}$
- $\left(2\sqrt{2}\right)^{\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1}$
- $\left(\left(\frac{2}{5}\right)^4\right)^{-0,25}$
- $64^{-\frac{2}{3}} + (2\sqrt{2})^{-\frac{4}{3}} \cdot 2^{-2} \cdot ((-8,7)^3)^0 \cdot \left(\frac{1}{225}\right)^{-\frac{1}{2}}$
- $-5,3^0 \cdot 8^{\frac{1}{2}} \cdot 98^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{81}\right)^{-\frac{1}{4}} + (-343)^{-\frac{1}{3}}$
- $\left(-5,5^0 \cdot 8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^4 \cdot (-5,5)^0\right)$
- $\sqrt[3]{\left(\frac{1}{343}\right)^{-1}} - (-5^0) + \left(10000^{-\frac{3}{4}}\right)^{-1} \cdot 125^{\frac{2}{3}}$
- $\left((2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} - \left(3\frac{3}{8}\right)^{\frac{1}{3}}\right) \cdot \left((2\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{2}\right) \cdot (-2\sqrt{3})^0$

Методические рекомендации

Для решения примеров по указанной теме необходимо применять следующие свойства степени:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$(ab)^n = a^n \cdot b^n$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n; a \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a^{nk}} = \sqrt[n]{a^n}$$

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

$$\sqrt[n]{a^n} = a^{\frac{n}{n}}; a > 0$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$(a^m)^n = a^{mn}$$

$$a^0 = 1; a \neq 0$$

$$\sqrt[n]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{a}$$

Рассмотрим решение нескольких примеров:

$$1. \left(\frac{27}{4^{-15}}\right)^{\frac{1}{3}} = \left(\frac{3^3}{(2^2)^{-\frac{3}{2}}}\right)^{\frac{1}{3}} = \frac{3^{\frac{3}{3}}}{2^{-\frac{3}{3}}} = 3 \cdot 2 = 6$$

Ответ: 6.

$$2. (2\sqrt{2})^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{-1} = ((\sqrt{2})^3)^{-\frac{1}{3}} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$$3. \left(-5,5^0 \cdot 8 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-4} \cdot (-5,5)^0\right) = (-1 \cdot 8 + (-2)^4 \cdot 1) = -8 + 16 = 8$$

Ответ: 8.

Задание: вычислить значение выражения без таблиц.

$$1. \log_{0,3} \frac{1}{0,09}$$

$$8. (\sqrt{5})^{2\lg_5 3}$$

$$17. \log_4 2 + \log_4 8$$

$$23. \log_5 \frac{1}{5} - 2\log_5 \frac{2}{3} + \log_5 \frac{4}{9}$$

$$2. \log_4 \frac{1}{128}$$

$$9. 25^{\lg_5 3}$$

$$18. \log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{4}{3}$$

$$24. \log_2 12 + \log_2 \frac{5}{3} + \log_2 \frac{4}{5}$$

$$3. \log_5 \frac{1}{5\sqrt{5}}$$

$$11. 10^{\lg 2 + \lg 3}$$

$$19. \log_5 8 - \log_5 2 + \log_5 \frac{25}{4}$$

$$25. \log_2 \log_2 \sqrt[4]{2}$$

$$4. \log_{\frac{1}{2}} 2\sqrt{2}$$

$$13. 16^{\lg_4 3 - 0,25 \lg_4 3}$$

$$20. \log_4 5 + \log_4 25 + \log_4 \frac{2}{125}$$

$$26. \log_8 \log_4 \log_2 16$$

$$5. \log_{\frac{1}{2}} \frac{1}{64}$$

$$14. \frac{1}{3} (1 + 9^{\lg_3 7})^{\lg_3 3}$$

$$21. \log_3 72 - \log_3 \frac{16}{27} + \log_3 18$$

$$28. (\sqrt{6})^{\frac{2}{\lg_4 6}}$$

$$6. \lg 0,01$$

$$15. 3^{\lg_{\sqrt{3}} 7}$$

$$22. 2\log_2 6 + \log_2 \frac{35}{9} - \log_2 35$$

$$29. (\log_5 36 + \log_5 2 - \log_5 8) \cdot \log_9 \frac{1}{25}$$

$$7. 0,04^{\lg_{0,4} 3}$$

$$16. \left(\frac{1}{3}\right)^{\lg_{\frac{1}{3}} 4}$$

$$30. 2^{\lg_{\frac{1}{2}} 125} + \log_2 \log_8 \sqrt[8]{5}$$

Методические рекомендации

Для вычисления логарифмов применяют основные свойства степени и свойства логарифмов:

$$\log_a 1 = 0$$

$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc$$

$$\log_a a = 1$$

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

$$\log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

$$\log_a x^m = m \log_a x \quad (m \in \mathbb{R})$$

$$x^{\lg_a y} = y^{\lg_a x}$$

$$x^{\lg_a y} = y^{\lg_a x}$$

$$\log_{a^m} x = \frac{1}{m} \log_a x \quad (m \neq 0)$$

Рассмотрим решение нескольких примеров:

$$1. \log_{0,3} \frac{1}{0,09}$$

Для применения свойства $\log_a a = 1$ выразим $\frac{1}{0,09}$ как степень 0,3, а затем подставим полученное выражение в условие и применим свойство $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$:

$$\frac{1}{0,09} = (0,09)^{-1} = (0,3^2)^{-1} = 0,3^{-2}$$

$$\log_{0,3} 0,3^{-2} = -2 \log_{0,3} 0,3 = -2$$

Ответ: -2.

$$2. 25^{\log_5 3}$$

Для применения основного логарифмического тождества $a^{\log_a b} = b$ представим 25 как 5^2 и используем формулу степени степени:

$$(5^2)^{\log_5 3} = 5^{2 \log_5 3} = 5^{\log_5 9} = 9$$

Ответ: 9.

$$3. \log_2 \sqrt{3} + \frac{1}{2} \log_2 \frac{4}{3}$$

На основании свойства $\log_a x^n = n \cdot \log_a x$ преобразуем второй логарифм:

$$\frac{1}{2} \log_2 \frac{4}{3} = \log_2 \left(\frac{4}{3} \right)^{\frac{1}{2}} = \log_2 \sqrt{\frac{4}{3}} = \log_2 \frac{2}{\sqrt{3}}$$

Теперь заменим сумму логарифмов логарифмом произведения:

$$\log_2 \sqrt{3} + \log_2 \frac{2}{\sqrt{3}} = \log_2 \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \log_2 2 = 1$$

Ответ: 1.

Задание. Подготовить сообщение на тему «Из истории логарифмов»

Методические рекомендации

При подготовке сообщения (доклада) целесообразно воспользоваться следующими рекомендациями:

- Уясните для себя суть темы, которая вам предложена.
- Подберите необходимую литературу (старайтесь пользоваться несколькими источниками для более полного получения информации).
- Тщательно изучите материал учебника по данной теме, чтобы легче ориентироваться в необходимой вам литературе и не сделать элементарных ошибок.
- Изучите подобранный материал (по возможности работайте карандашом), выделяя самое главное по ходу чтения.
- Составьте план сообщения.

Напишите текст доклада

Тема 3. Прямые и плоскости в пространстве

Задание. Подготовить сообщение на тему «Геометрия Евклида»

Методические рекомендации

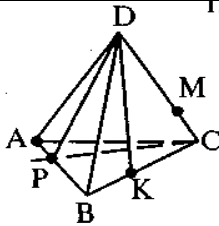
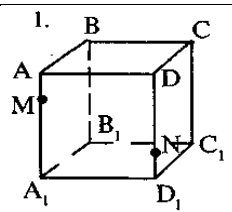
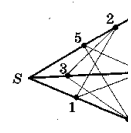
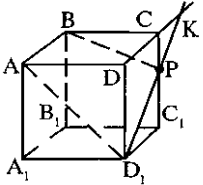
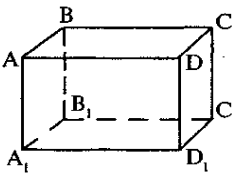
При подготовке сообщения (доклада) целесообразно воспользоваться следующими рекомендациями:

- Уясните для себя суть темы, которая вам предложена.
- Подберите необходимую литературу (старайтесь пользоваться несколькими источниками для более полного получения информации).
- Тщательно изучите материал учебника по данной теме, чтобы легче ориентироваться в необходимой вам литературе и не сделать элементарных ошибок.
- Изучите подобранный материал (по возможности работайте карандашом), выделяя самое главное по ходу чтения.
- Составьте план сообщения.

Напишите текст доклада

Задание. Решить задачи.

Параллельность прямых и плоскостей в пространстве

	A1 Какой плоскости не принадлежит точка В? A) PDB B) ADC C) APC D) BDC	A2 На каких плоскостях лежит прямая DA? A) ADC и ADB B) ADB и ABC C) ADB и DCB D) DKB и DCA	A3 В какой точке пересекаются прямая DK и плоскость ADB? A) P B) K C) A D) D	A4 По какой прямой пересекаются плоскости ABC и ADB? A) DB B) DC C) AC D) BA	A5 Какие прямые лежат в плоскости BDA? A) DB, AC, DK. AB B) KB, DA, DK. CP C) DP, DB, DA. BA D) DB, DC, DK. CB
	A6 Укажите точку пересечения прямой NC ₁ с плоскостью A ₁ B ₁ C ₁ A) D ₁ B) C ₁ C) A ₁ D) B ₁	A7 Укажите прямую пересечения плоскостей ABD и ADD ₁ A) DB B) BB ₁ C) BC D) AD	A8 Прямые a и b пересекаются в точке C. Выберите верную запись: A) $a \times b = c$ B) $a \cap b = c$ C) $a \parallel b = c$ D) $a \cap b = C$	A9  Туго натянутая нить закреплена в точках 1,2,3,4,5, 6 расположенных на стержнях SA,SB,SC. Укажите количество точек в которых отрезки нити соприкасаются A) 0 B) 1 C) 2 D) 3	
	A10 Как располагаются прямые DD ₁ и DC? A) параллельны B) пересекаются C) перпендикулярны	A11 Найдите угол между прямыми AA ₁ и BC A) 180° B) 60° C) 90° D) 45°	A12 Найдите точку пересечения прямых DC и D ₁ P A) D B) C C) A D) K	A13  Найдите рёбра, параллельные грани ADD ₁ A ₁ A) BC, CC ₁ , BB ₁ , B ₁ C ₁ B) AB, BC, A ₁ D ₁ , B ₁ C ₁ C) AD, BC, A ₁ D ₁ , AC	

Перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве

	A14 Укажите рёбра, перпендикулярные плоскости ABC А) AD, BA В) AB, D ₁ C ₁	A15 Выберите верное утверждение А) AD ⊥ BA В) AB ⊥ D ₁ C ₁	A16 Можно ли провести плоскость через четыре произвольные точки	A17 Отрезок BD перпендикулярен плоскости α. СВ является: А) Перпендикуляром В) Наклонной
--	--	--	---	--

3. Сколькими различными способами можно построить в шеренгу 5 человек?
4. Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя цифры 3, 4, 5 и 6? Сколько различных двузначных чисел можно записать, используя при записи числа каждую из указанных цифр только один раз? Запишите эти числа.
5. Сколько трехзначных чисел можно составить из трех различных, не равных нулю цифр? Зависит ли результат от того, какие цифры взяты? Укажите какой-нибудь способ перебора трехзначных чисел, при котором ни одно число не может быть пропущено.
6. Сколько всевозможных трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 2, 3 и 4 так, чтобы цифры в записи числа не повторялись? Изменится ли решение этой задачи, если вместо цифры 4 будет дана цифра 0?
7. Сколько всевозможных четырехзначных чисел можно составить, используя для записи цифры 1, 2, 3 и 4? Какова разность между самым большим и самым маленьким из них?
8. Покажите, что в нижеприведенных задачах рассматриваются размещения из k элементов по m ; определите значения k и m и найдите число размещений: а) Из 20 учащихся класса надо выбрать старосту, его заместителя и редактора газеты. Сколькими способами это можно сделать? б) В классе изучаются 7 предметов. В среду 4 урока, причем все разные. Сколькими способами можно составить расписание на среду? в) В соревновании участвуют 10 человек. Сколькими способами могут распределиться между ними места? г) Сколько всевозможных трехзначных чисел можно записать, используя цифры 3, 4, 5 и 6?
9. Покажите, что в следующих задачах рассматриваются сочетания из k элементов по m , определите значения k и m и найдите число для каждой задачи: а) Сколькими способами можно выбрать из 6 человек комиссию, состоящую из трех человек? б) Сколькими способами можно выбрать 4 краски из 10 различных красок?
10. Сколькими способами можно расставить на полке 3 различные книги? Переставить три различные буквы, три различные цифры?
11. Решите следующие задачи, используя формулы. Ответ проверьте с помощью перебора всех возможных вариантов:
 - а) Сколько словарей необходимо переводчику, чтобы он мог переводить непосредственно с любого из четырех языков - русского, английского, немецкого и французского - на любой другой из этих языков?
 - б) Государственные флаги некоторых стран состоят из трех горизонтальных полос разного цвета. Сколько различных вариантов флагов с белой, синей и красной полосами можно составить?
 - в) Мальчик выбрал в библиотеке 5 книг. По правилам библиотеки одновременно можно взять только 2 книги. Сколько у мальчика вариантов выбора двух книг из пяти?
 - г) Четыре друга собрались на футбольный матч. Но им удалось купить только три билета. Из скольких вариантов им надо выбрать тройку счастливых? Как осуществить выбор, чтобы у всех ребят равные шансы попасть на матч?
 - д) В классе три человека хорошо поют, двое других играют на гитаре, а еще один умеет показывать фокусы. Сколькими способами можно составить концертную бригаду из певца, гитариста и фокусника?
 - е) Задача Леонарда Эйлера. Трое господ при входе в ресторан дали швейцару свои шляпы, а при выходе получили их обратно. Сколько существует вариантов, при которых каждый из них получит чужую шляпу?
 - ж) Имеется ткань двух цветов: голубая и зеленая, и требуется обить диван, кресло и стул. Сколько существует различных вариантов обивки этой мебели?

При решении задач необходимо пользоваться основными понятиями и формулами комбинаторики – перестановки, размещения и сочетания.

Определение: Комбинацией из n элементов, которые отличаются друг от друга только порядком элементов, называется перестановками.

Перестановки обозначаются символом P_n , где n – число элементов, входящих в каждую перестановку. $P_n = n!$

Пример. Сколько шестизначных чисел, кратных 5, можно составить из цифр: 0, 1, 2, 3, 4, 5, при условии, что в цифрах нет одинаковых цифр?

Решение. Число, кратное 5, должно оканчиваться либо на «0», либо на «5». Если последняя цифра – «0», то остальные 5 цифр можно располагать в любом порядке. Следовательно, шестизначных чисел, которые заканчиваются цифрой «0» столько, сколько можно сделать P_5 .

Если последней цифрой числа является «5», то остальные пять цифр можно расположить P_5 способами. Но из этих способов не действительны те, где на первом месте «0».

Значит, количество чисел, кратных 5 и оканчивающихся на «5», равно $P_5 - P_4$.

Всего имеется $P_5 + (P_5 - P_4) = 2P_5 - P_4 = 2 \cdot (1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5) - 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 216$ шестизначных чисел кратных 5.

Определение: Комбинации из m элементов по n элементов, которые отличаются друг от друга или самими элементами, или порядком элементов, называется размещением.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Пример. В седьмом классе изучают 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание на субботу, если в этот день должно быть 5 уроков разных?

Решение. Здесь порядок уроков важен.

$$A_{14}^5 = \frac{14!}{(14-5)!} = \frac{14!}{9!} = \frac{9! \cdot 10 \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13 \cdot 14}{9!} = 240240$$

Определение: Сочетаниями называются все возможные комбинации из n элементов по m , которые отличаются друг от друга по крайней мере хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{(n-m)!m!}$$

Пример. Сколькими способами из восьми человек можно избрать комиссию, состоящую из пяти членов?

Решение. Для решения задачи необходимо использовать формулу для сочетания элементов, т. к. здесь не имеет значения порядок элементов в выборе. Запишем формулу для сочетаний.

$$C_8^5 = \frac{8!}{(8-5)!5!} = \frac{8!}{3!5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 5!} = 56$$

Тема 5. Координаты и векторы

Задание. Решение задач.

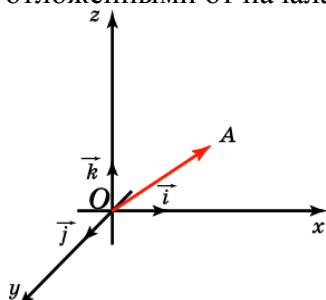
$$\vec{a}\{2; -3; 4\}, \quad \vec{b}\{-1; 2; 0\}$$

1. Найти сумму векторов

- 2 Найти разность векторов $\vec{a}\{4; -5; 7\}, \vec{b}\{3; -1; 2\}$
- 3 Найти произведение на число $\vec{a}\{-2; 4; 0\}, \delta - \text{число} \delta = -4$
- 4 Вычислить координаты середины отрезка Точка A(-3; 1; 2) Точка B (2;-3;1 Точка C- середина отрезка AB. $C(x_c; y_c; z_c)$
- 5 Найти координаты вектора Точка A(6; -3; 4). Точка B (1;-4;7.
- 6 Найти длину вектора $\vec{a}\{7; 2; -1\}$
- 7 Вычислить скалярное произведение векторов $\vec{a}\{-3; 2; 9\}, \vec{b}\{-7; 0; 3\}$
- 8 Найти косинус угла между векторами $\vec{a}\{4; 1; 0\}, \vec{b}\{-5; 3; 1\}$
- 9 При каких значениях m и n векторы коллинеарны? $\vec{a}\{m; 5; 3\}, \vec{b}\{2; n; 4\}$
- 10 Проверьте перпендикулярность векторов $\vec{a}\{0; -3; 2\}, \vec{b}\{9; 4; 6\}$

Методические рекомендации

Отложим вектор так, чтобы его начало совпало с началом координат. Тогда координаты его конца называются координатами вектора. Обозначим $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ векторы с координатами (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) соответственно. Их длины равны единице, а направления совпадают с направлениями соответствующих осей координат. Будем изображать эти векторы, отложенными от начала координат и называть их координатными векторами.



Теорема. Вектор $\vec{a}$ имеет координаты (x, y, z) тогда и только тогда, когда он представим в виде $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

Образцы решения

№п/п	Название операции	Формулы
1	Найти сумму векторов	$\vec{a}\{1; -2; 3\}, \vec{b}\{4; 0; -1\}$ $\vec{a} + \vec{b}\{x_1 + x_2; y_1 + y_2; z_1 + z_2\}$

2	Найти разность векторов	$\vec{a}\{4; 1; -3\}, \vec{b}\{0; -5; 2\}$ $\vec{a} - \vec{b}\{x_1 - x_2; y_1 - y_2; z_1 - z_2\}$
3	Найти произведение вектора на число	$\vec{a}\{-1; 3; 1\}, \delta - \text{число } \delta = -3$ $\delta \vec{a}\{\delta \cdot x; \delta y; \delta z\}$
4	Вычислить координаты середины отрезка	Точка А (-2; 0; 5) Точка В (-3;4;-1) Точка С- середина отрезка АВ. $C(x_c; y_c; z_c)$ $x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad y_c = \frac{y_1 + y_2}{2},$ $z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$
5	Найти координаты вектора	Точка А (2; 7; -9) Точка В (-1;4;-7). Находим координаты вектора $\overrightarrow{AB}$. Из координат конца вычесть координаты начала вектора $\overrightarrow{AB}\{x_2 - x_1; y_2 - y_1; z_2 - z_1\}$
6	Найти длину вектора	$\vec{a}\{5; 1; -1\}$ $ \vec{a} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
7	Вычислить скалярное произведение векторов	$\vec{a}\{-2; 3; 7\}, \vec{b}\{-9; 0; 2\}$ $\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$
8	Найти косинус угла между векторами	$\vec{a}\{2; 0; 1\}, \vec{b}\{-3; 1; 2\}$ $\cos \alpha = \frac{x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2}{\sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} \cdot \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2}}$
9	При каких значениях m и n векторы коллинеарны?	$\vec{a}\{m; 3; 1\}, \vec{b}\{1; n; 2\}$ $\frac{x_1}{x_2} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{z_1}{z_2} = k$
10	Проверьте перпендикулярность векторов	$\vec{a}\{-4; 0; 1\}, \vec{b}\{2; 7; 8\}$ $x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2 = 0$ - условие перпендикулярности векторов

Тема 6. Основы тригонометрии

Задание. Подготовить сообщение на тему «История тригонометрии и ее роль в изучении естественно-математических наук»

Методические рекомендации

При подготовке сообщения (доклада) целесообразно воспользоваться следующими рекомендациями:

- Уясните для себя суть темы, которая вам предложена.
- Подберите необходимую литературу (старайтесь пользоваться несколькими источниками для более полного получения информации).

- Тщательно изучите материал учебника по данной теме, чтобы легче ориентироваться в необходимой вам литературе и не сделать элементарных ошибок.
- Изучите подобранный материал (по возможности работайте карандашом), выделяя самое главное по ходу чтения.
- Составьте план сообщения.

Напишите текст доклада

Рекомендуемая литература:

1. Акимов С. Занимательная математика. – СПб.: Тригон, 1997
2. Глейзер Г.И. История математики в школе: IX-X кл. Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 1983г.
3. Дектярева З.А. Математика после уроков. – Краснодар, 1996
4. Депман И.Я. За страницами учебника математики. – М.: Просвещение, 1989
5. Матвиевская Г. П. Очерки истории тригонометрии: Древняя Греция. Средневековый Восток. Позднее Средневековье. — Изд. 2-е. — М.: Либроком, 2012. — 160 с
6. Математика: Школьная энциклопедия. – М.: «Большая Российская энциклопедия», 1996
7. Шеина О.С., Соловьева Г.М. Математика. Занятие школьного кружка. – М.: НЦ ЭНАС, 2001
8. Щербакова Ю.В. Занимательная математика на уроках и внеклассных мероприятиях. – М.: ООО «Глобус», 2008

Задание. Решить задачи.

Вычислить

$$\begin{array}{ll}
 \text{а). } \sin \frac{7\pi}{3}, & \text{б). } \cos \left(-\frac{5\pi}{4} \right), \\
 \text{в). } \operatorname{tg} \left(-\frac{13\pi}{6} \right), & \text{г). } \operatorname{ctg} 13,5\pi \\
 \text{д). } 2 \sin 870^\circ + \sqrt{12} \cos 570^\circ - \operatorname{tg}^2 60^\circ. & \text{е). } 4 \sin^2 120^\circ - 2 \cos 600^\circ + \sqrt{27} \operatorname{tg} 660^\circ. \\
 \text{а). } \sin 58^\circ \cos 13^\circ - \cos 58^\circ \sin 13^\circ; & \\
 \text{б). } \cos \frac{\pi}{12} \cos \frac{7\pi}{12} - \sin \frac{\pi}{12} \sin \frac{7\pi}{12} &
 \end{array}$$

Упростить

$$\begin{array}{ll}
 \operatorname{tg} t \cdot \cos(-t) + \sin(\pi + t) & \operatorname{ctg} t \cdot \sin(-t) + \cos(2\pi - t) \\
 \text{а). } \sin^2(\pi + t) - \sin^2(\pi - t); & \cos^2(2\pi - t) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{2} + t\right) \\
 \text{б). } \frac{1}{2} \cos t - \sin\left(\frac{\pi}{6} + t\right). & \\
 \text{а). } \cos(\alpha - \beta) + \cos \alpha \sin \beta; & \\
 \text{б). } \frac{1}{2} \sin \alpha + \cos\left(\frac{\pi}{6} + \alpha\right). & (1 - \cos \alpha)(1 + \cos \alpha) \quad \cos^2 \alpha + 1 - \sin^2 \alpha \\
 \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg}^2 \alpha) & \frac{1 - \sin^2 \alpha}{\cos \alpha} \quad \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} + \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} \quad \frac{(\sin \alpha + \cos \alpha)^2}{1 + 2 \sin \alpha \cos \alpha}
 \end{array}$$

Доказать тождество

$$\frac{ctgt}{tgt + ctgt} = \cos^2 t \quad \frac{tgt}{tgt + ctgt} = \sin^2 t$$

$$\frac{(1 + \cos \alpha)^2 - (1 - \cos \alpha)^2}{4 \cos \alpha} - ctg \alpha \cdot \sin \alpha \cdot \cos \alpha = \sin^2 \alpha \quad \sin^4 \beta - \cos^4 \beta + 2 \cos^2 \beta = 1$$

$$(tg \alpha + ctg \alpha)^2 - (tg \alpha - ctg \alpha)^2 = 4 \quad (1 + tg \alpha)^2 + (1 - tg \alpha)^2 = \frac{2}{\cos^2 \alpha};$$

Методические рекомендации

При решении необходимо использовать основные формулы тригонометрии.

Разберем несколько примеров

Пример 1. Вычислить $\sin 75^\circ$.

Решение. Имеем $\sin 75^\circ = \sin(30^\circ + 45^\circ)$. Воспользуемся формулой сложения двух аргументов и получим

$$\sin(30^\circ + 45^\circ) = \sin 30^\circ \cos 45^\circ + \cos 30^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}$$

Вычислить $3 \sin \frac{\pi}{6} - tg \frac{\pi}{4} + 2 \sin \frac{\pi}{2} - \cos \pi = 3 \cdot \frac{1}{2} - 1 + 2 \cdot 1 + 1 = 1.5 + 2 = 3.5$

Пример 2. Упростить выражение $tgt - ctgt$.

Решение.

$$tgt - ctgt = \frac{\sin t}{\cos t} - \frac{\cos t}{\sin t} = \frac{\sin^2 t - \cos^2 t}{\cos t \sin t} = -\frac{\cos^2 t - \sin^2 t}{\frac{1}{2} \sin 2t} = -2 \frac{\cos 2t}{\sin 2t} = -2ctg 2t$$

Упростить выражение

$$\begin{aligned} 1) & tg^2 \beta (\sin^2 \beta - 1) = \\ & = tg^2 \beta \cdot (\sin^2 \beta - (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta)) = \\ & = tg^2 \beta \cdot (\sin^2 \beta - \sin^2 \beta - \cos^2 \beta) = \\ & = tg^2 \beta \cdot (-\cos^2 \beta) = -\frac{\sin^2 \beta}{\cos^2 \beta} \cdot \cos^2 \beta = -\sin^2 \beta \end{aligned}$$

Ответ: $-\sin^2 \beta$

Пример 3. Доказать тождество

$$(2 + \sin \beta)(2 - \sin \beta) + (2 + \cos \beta)(2 - \cos \beta) = 7$$

$$4 - \sin^2 \beta + 4 - \cos^2 \beta = 7$$

$$8 - (\sin^2 \beta + \cos^2 \beta) = 7$$

$$8 - 1 = 7$$

$$7 = 7$$

Тождество доказано.

Продолжение Тема 6. Основы тригонометрии

Задание. Решить задачи.

Задание: решить уравнение.

- | | | | |
|--|---|--|--|
| 1. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$ | 9. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 16. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 24. $\operatorname{ctg}\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 2. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 10. $\cos\left(4x - \frac{\pi}{3}\right) = -4$ | 17. $\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$ | 25. $\sin\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{4}\right) = -\frac{1}{2}$ |
| 3. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 11. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 4x\right) = -\sqrt{3}$ | 18. $\cos\left(5x - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | 26. $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \frac{3x}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ |
| 4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{7}\right) = -\sqrt{3}$ | 12. $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{6}\right) = -9$ | 19. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 7x\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 27. $\operatorname{tg}\left(6x - \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| 5. $\sin\left(4x - \frac{\pi}{5}\right) = 7$ | 13. $\sin\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{7}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 20. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} - 4x\right) = -\sqrt{3}$ | 28. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} + 3x\right) = -\sqrt{3}$ |
| 6. $\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{5}\right) = -\frac{1}{2}$ | 14. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{5}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 21. $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{3}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ | 29. $\sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| 7. $\operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 8$ | 15. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - 6x\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | 22. $\cos\left(5x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ | 30. $\cos\left(\frac{\pi}{2} - 2x\right) = -\frac{1}{2}$ |
| 8. $\operatorname{ctg}\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$ | | 23. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} - \frac{\pi}{6}\right) = -\sqrt{3}$ | |

Задание: решить уравнение.

- | | | | |
|--|--|--|---|
| 1. $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$ | 9. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{5}\right) = -1$ | 16. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{7} - 3x\right) = 0$ | 24. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + \frac{x}{3}\right) = 1$ |
| 2. $\cos\left(\frac{\pi}{4} - x\right) = 0$ | 10. $\cos\left(5x + \frac{\pi}{8}\right) = -1$ | 17. $\sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ | 25. $\sin\left(3x + \frac{\pi}{5}\right) = -1$ |
| 3. $\operatorname{tg}\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ | 11. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{2}\right) = -1$ | 18. $\cos\left(2x + \frac{\pi}{7}\right) = -1$ | 26. $\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 1$ |
| 4. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{6} + x\right) = 0$ | 12. $\operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -1$ | 19. $\operatorname{tg}\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$ | 27. $\operatorname{tg}\left(5x - \frac{\pi}{7}\right) = 1$ |
| 5. $\sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 1$ | 13. $\sin\left(4x + \frac{\pi}{5}\right) = 0$ | 20. $\operatorname{ctg}\left(9x + \frac{\pi}{7}\right) = -1$ | 28. $\operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$ |
| 6. $\cos\left(\frac{x}{4} - \frac{\pi}{7}\right) = 1$ | 14. $\cos\left(\frac{x}{5} - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ | 21. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$ | 29. $\sin\left(\frac{\pi}{3} - \frac{x}{4}\right) = 1$ |
| 7. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{5} + 2x\right) = 1$ | 15. $\operatorname{tg}\left(5x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ | 22. $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{4}\right) = 0$ | 30. $\cos\left(\frac{\pi}{6} - \frac{x}{3}\right) = -1$ |
| 8. $\operatorname{ctg}\left(3x + \frac{\pi}{4}\right) = 1$ | | 23. $\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4} - 3x\right) = -1$ | |

Методические рекомендации

Тригонометрические уравнения, содержащие в левой части одну тригонометрическую функцию, а в правой части число, отличное от 0; 1 или -1, называются *тригонометрическими уравнениями общего вида*.

Формулы корней тригонометрического уравнения общего вида (во всех случаях $n \in \mathbb{Z}$):

$$\sin x = \alpha \quad \alpha \in (-1; 0) \cup (0; 1)$$

$$x = (-1)^n \cdot \arcsin \alpha + \pi n$$

$$\arcsin(-\alpha) = -\arcsin \alpha$$

$$\operatorname{tg} x = \alpha$$

$$x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi n$$

$$\operatorname{arctg}(-\alpha) = -\operatorname{arctg} \alpha$$

$$\cos x = \alpha \quad \alpha \in (-1; 0) \cup (0; 1)$$

$$x = \pm \arccos \alpha + 2\pi n$$

$$\arccos(-\alpha) = \pi - \arccos \alpha$$

$$\operatorname{ctg} x = \alpha$$

$$x = \operatorname{arctg} \alpha + \pi n$$

$$\operatorname{arctg}(-\alpha) = \pi - \operatorname{arctg} \alpha$$

Уравнения, содержащие неизвестную переменную под знаком тригонометрической функции, называются *тригонометрическими уравнениями*. Решением тригонометрического уравнения является множество углов (из-за периодичности тригонометрических функций), удовлетворяющих данному условию.

Простейшими тригонометрическими уравнениями называются уравнения, содержащие одну тригонометрическую функцию в левой части и 0; 1 или -1 в правой части. Уравнения этого типа решаются с помощью единичной окружности и определения (во всех случаях $n \in \mathbb{Z}$):

$$\sin x = 0 \quad x = \pi n$$

$$\sin x = 1 \quad x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\sin x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$\cos x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\cos x = 1 \quad x = 2\pi n$$

$$\cos x = -1 \quad x = \pi + 2\pi n$$

$$\operatorname{tg} x = 0 \quad x = \pi n$$

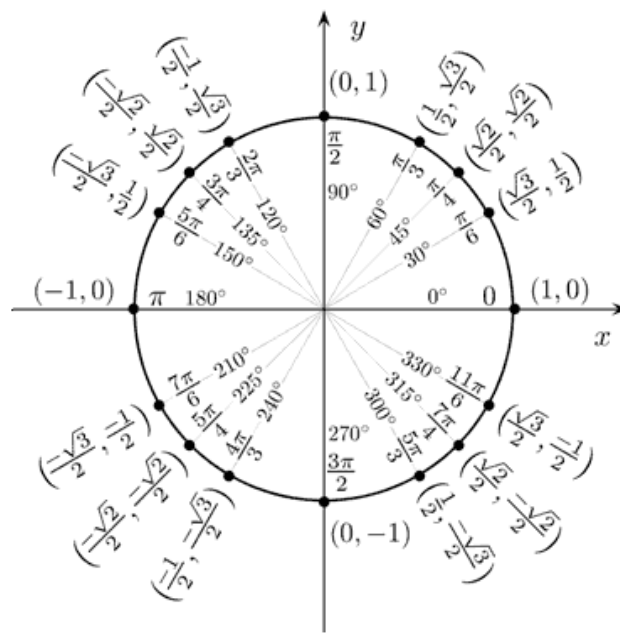
$$\operatorname{tg} x = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\operatorname{tg} x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\operatorname{ctg} x = 0 \quad x = \frac{\pi}{2} + \pi n$$

$$\operatorname{ctg} x = 1 \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\operatorname{ctg} x = -1 \quad x = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$



(единичная окружность)

Рассмотрим решение нескольких примеров:

$$1. \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n$$

$$2x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$2x = (-1)^n \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{3} + \pi n$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } (-1)^n \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2 \operatorname{tg}\left(2x + \frac{\pi}{6}\right) = 8$$

$$2x + \frac{\pi}{6} = \operatorname{arctg} 8 + \pi n$$

($\operatorname{arctg} 8$ – не табличное значение, поэтому в решении он так и остается)

$$2x = \operatorname{arctg} 8 - \frac{\pi}{6} + \pi n$$

$$x = \frac{\operatorname{arctg} 8}{2} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\operatorname{arctg} 8}{2} - \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{2} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Рассмотрим решение нескольких примеров:

$$1. \sin\left(x + \frac{\pi}{5}\right) = 1$$

Так как по определению $\sin \alpha = y$, рассмотрим на единичной окружности точку с ординатой 1; в силу периодичности тригонометрических

функций ей соответствуют углы $\frac{\pi}{2} + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$:

$$x + \frac{\pi}{5} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n$$

$$x = 0, 3\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } 0, 3\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$2. \cos\left(5x + \frac{\pi}{8}\right) = -1$$

Так как по определению $\cos \alpha = x$, рассмотрим на единичной окружности точку с абсциссой -1 ; в силу периодичности тригонометрических функций ей соответствуют углы $\pi + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$:

$$5x + \frac{\pi}{8} = \pi + 2\pi n$$

$$5x = \frac{7\pi}{8} + 2\pi n$$

$$x = \frac{7\pi}{40} + \frac{2\pi}{5} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{7\pi}{40} + \frac{2\pi}{5} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$3. \operatorname{tg}\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$8x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$8x = \frac{\pi}{12} + \pi n \quad | : 8$$

$$x = \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{8} n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\pi}{96} + \frac{\pi}{8} n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

$$4. \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3}\right) = -1$$

$$\frac{x}{4} + \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + \pi n$$

$$\frac{x}{4} = -\frac{7\pi}{12} + \pi n$$

$$x = -\frac{7\pi}{3} + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

$$\text{Ответ: } -\frac{7\pi}{3} + 3\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Тема 7. Функции и графики

Задание. Решить задачи.

1. Постройте график функции: $y = \sin x + 3$.
2. Постройте график функции:

3. Найдите множество значений функции $y = \cos\left(x + \frac{\pi}{6}\right) + 7$.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = -4 \cos(x - \pi) - 3$$
5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sin x + 3$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{2}; \pi\right]$.
6. Построить график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 2$

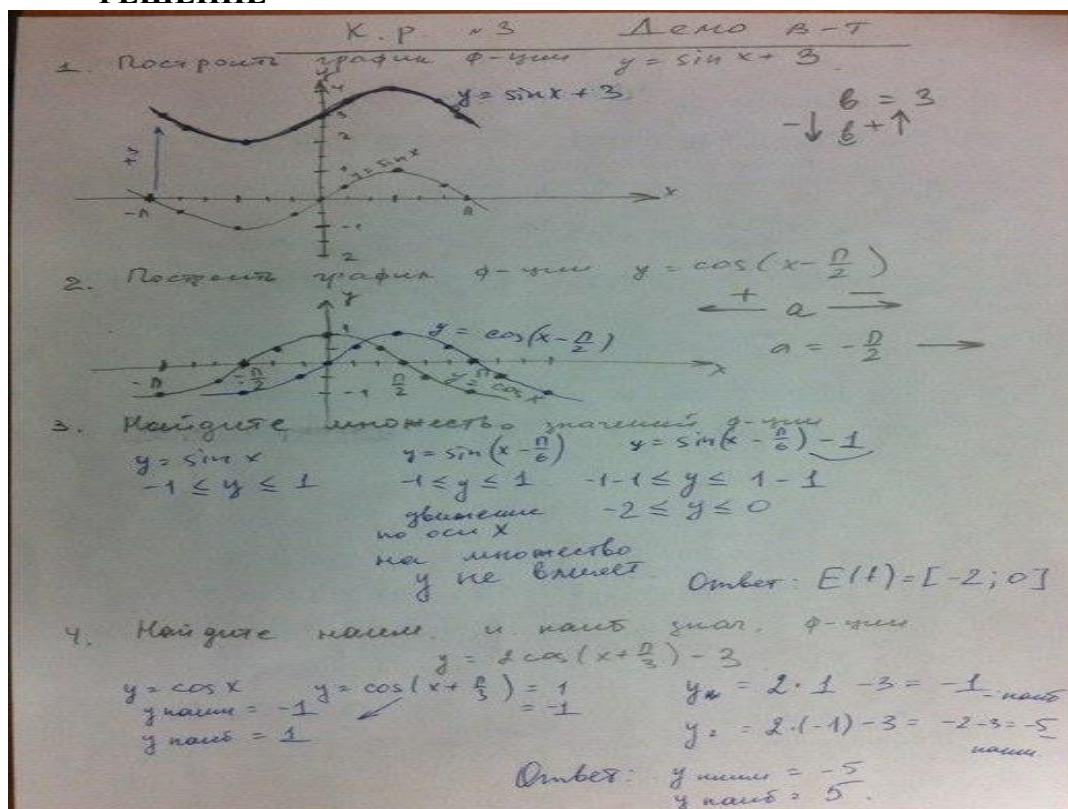
Методические рекомендации

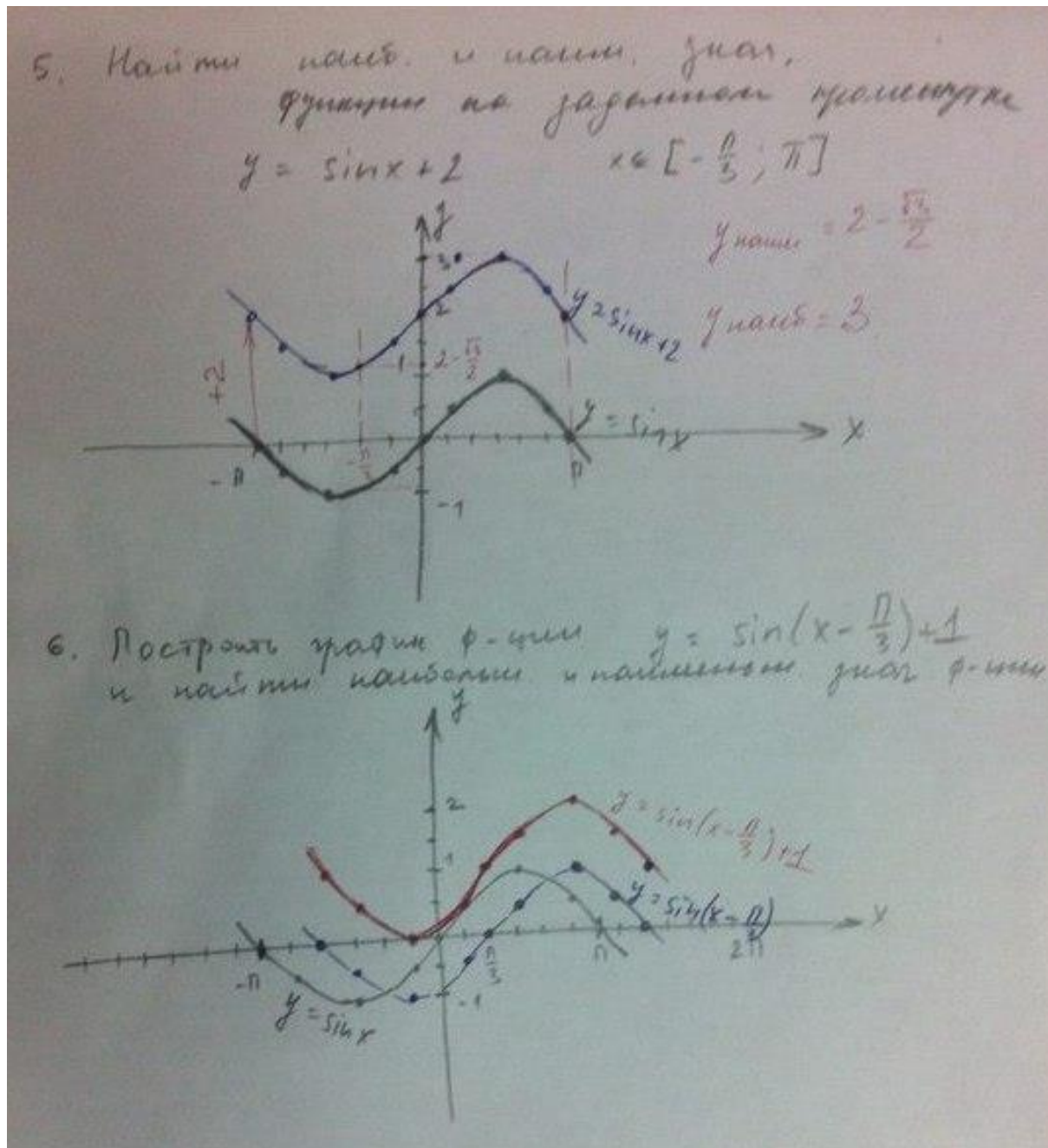
Контрольная работа №3
Свойства и графики тригонометрических функций
Демонстрационный вариант

1. Постройте график функции: $y = \sin x + 3$.
2. Постройте график функции: $y = \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$
3. Найдите множество значений функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{6}\right) - 1$.
4. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции

$$y = 2 \cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right) - 3$$
5. Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = \sin x + 2$ на отрезке $\left[-\frac{\pi}{3}; \pi\right]$.
6. Построить график функции $y = \sin\left(x - \frac{\pi}{3}\right) + 1$

РЕШЕНИЕ

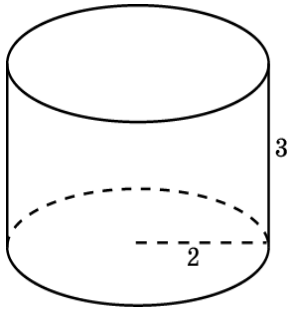




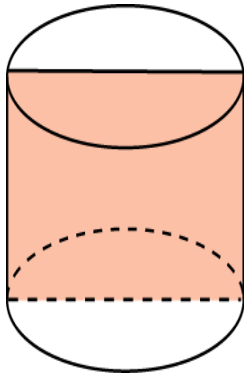
Тема 8. Многогранники и круглые тела

Задание 1. Решить задачи.

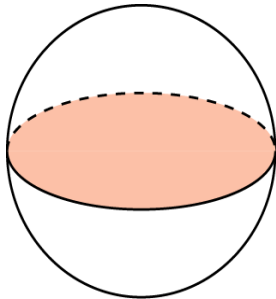
1. Чему равна площадь поверхности куба с ребром 1 см?
2. Найдите площадь боковой поверхности правильной шестиугольной призмы, сторона основания которой равна 5 см, а высота 10 см.
3. Найдите площадь боковой поверхности правильной четырёхугольной пирамиды, сторона основания которой равна 6 см и высота 4 см.
4. Радиус основания цилиндра равен 2 м, высота - 3 м. Найдите площадь боковой поверхности и объем цилиндра.



5. Площадь осевого сечения цилиндра равна 4 м^2 . Найдите площадь боковой поверхности .

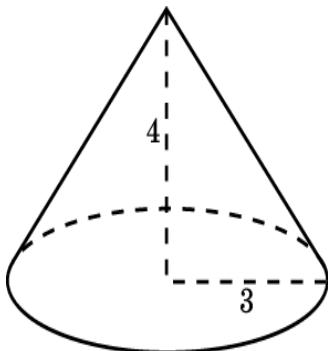


6. Площадь большого круга шара равна 3 см^2 . Найдите площадь поверхности

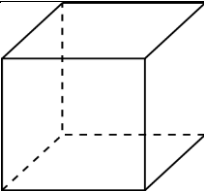
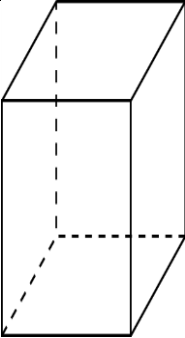
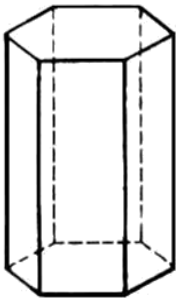
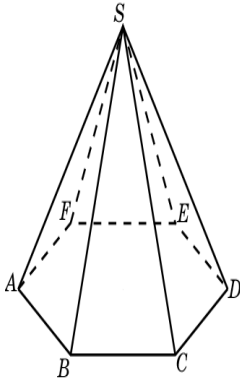


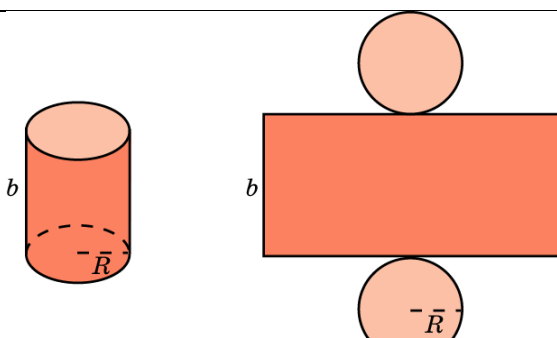
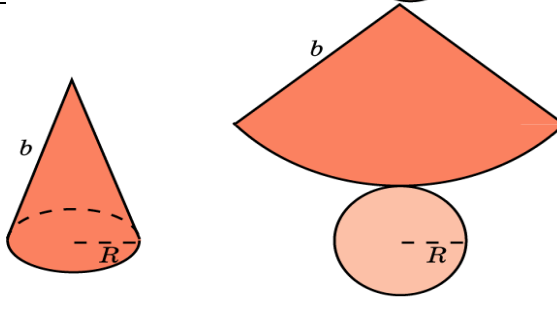
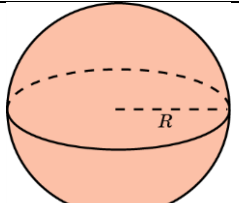
7. Прямоугольник вращается вокруг одной из сторон, равной 5 см. Площадь боковой поверхности цилиндра, полученного при вращении, равна $100\pi \text{ см}^2$. Найдите площадь прямоугольника.

8. Радиус основания конуса равен 3 м, высота - 4 м. Найдите площадь поверхности и объем конуса.



Методические рекомендации
Основные формулы

№п/п	Наименование многогранника	Изображение	Площадь боковой и полной поверхности
1	Куб		$S_{\pi} = 6a^2$
2	Прямоугольный параллелепипед		$S_{\pi} = 2ab + 2ac + 2bc$
3	Призма		$S_{\text{б}} = p \cdot H$ $S_{\pi} = S_{\text{б}} + 2S_o$
4	Пирамида		$S_{\text{б}} = \frac{1}{2} p \cdot h$ $S_{\pi} = S_{\text{б}} + S_o$
№п/п	Наименование фигуры	Изображение	Формула площадей полной и боковой поверхности

1	Цилиндр		$S_{\text{б}} = 2\pi RH$ $S_{\text{п}} = 2\pi RH + 2\pi R^2$ $S_{\text{o}} = \pi R^2$ $V = \pi R^2 \cdot H$
2	Конус		$S_{\text{б}} = \pi Rl$ $S_{\text{п}} = \pi Rl + \pi R^2$ $S_{\text{o}} = \pi R^2$ $V = \frac{1}{3}\pi R^2 \cdot H$
3	Шар		$S_{\text{п}} = 4\pi R^2$ $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

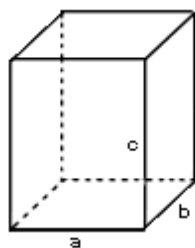
Задание 2. Решить задачи.

1. Найти объем конуса с диаметром 6 см и высотой 5 см.
2. Объем цилиндра равен $100\pi \text{ м}^3$. Чему равен радиус основания, если высота равна 4 м?
3. В основании прямой призмы лежит прямоугольник со сторонами 3 см и 4 см. Высота призмы 2 см. Найти объем.
4. Боковое ребро правильной четырехугольной пирамиды равно 4 см и образует с плоскостью основания угол 60° . Найдите объем пирамиды.
5. Осевым сечением цилиндра является квадрат со стороной 8 см. Найдите объем цилиндра.
6. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см. Все боковые ребра равны 13 см. Найдите объем пирамиды.
7. Найдите объем тела, полученного при вращении прямоугольника со сторонами 6 см. и 10 см. вокруг большей стороны.

Методические рекомендации

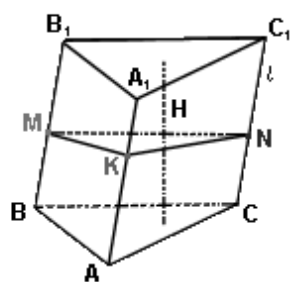
Основные формулы

Прямоугольный параллелепипед



$$V = abc$$

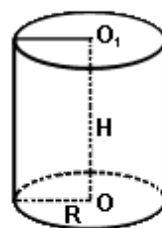
Призма



$$V = S_{\text{осн}} \cdot H$$

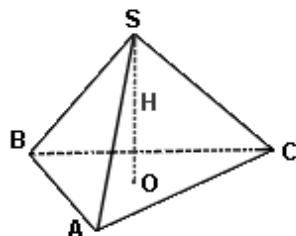
$$V = S_{MKN} \cdot l \text{ (MKN – перпендикулярное к } CC_1 \text{ сечение)}$$

Цилиндр



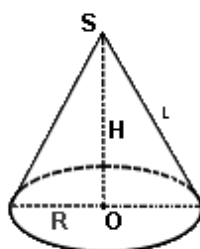
$$V = \pi R^2 H$$

Пирамида



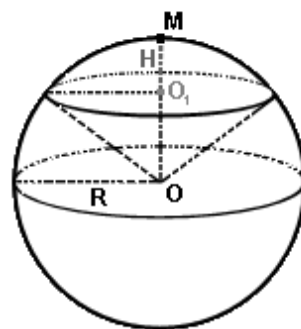
$$V = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} H$$

Конус



$$V = \frac{1}{3} \pi R^2 H$$

Шар



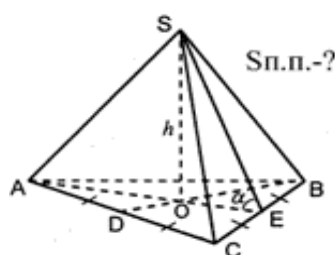
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$V_{\text{сегм}} = \pi H^2 \left(R - \frac{1}{3} H \right), \text{ где } H = MO_1$$

$$V_{\text{сект}} = \frac{2}{3} \pi R^2 H, \text{ где } H = MO_1$$

Рассмотрим решение нескольких примеров:

1.



Рассмотрим $\triangle SOE$:

$$SE = h \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

$$OE = h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

Так как OE - радиус вписанной окружности, то

$$BC = \sqrt{3} \cdot OE = \sqrt{3} \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

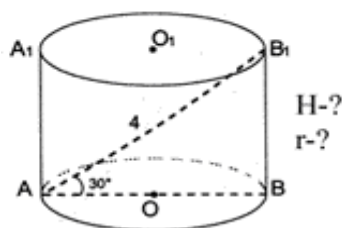
$$S_{осн} = \frac{\sqrt{3}}{4} BC^2 = \frac{3}{4} h \cdot \operatorname{ctg} \alpha$$

$$S_{бок} = p \cdot SE = 3 \cdot BC \cdot SE = 3\sqrt{3} \cdot h \cdot \operatorname{ctg} \alpha \cdot h \cdot \operatorname{tg} \alpha = 3\sqrt{3} \cdot h^2$$

$$S_{\text{ит}} = S_{осн} + S_{бок} = \frac{3}{4} h \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 3\sqrt{3} \cdot h^2$$

Ответ: $\frac{3}{4} h \cdot \operatorname{ctg} \alpha + 3\sqrt{3} \cdot h^2$.

2.



Рассмотрим $\triangle AB_1B$:

$$H = B_1B = \frac{AB_1}{2} = 2$$

$$AB_1^2 = AB^2 + BB_1^2$$

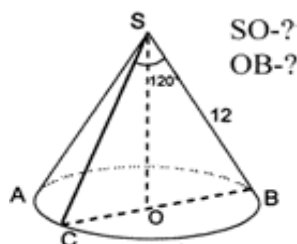
$$AB^2 = AB_1^2 - BB_1^2 = 16 - 4 = 12$$

$$AB = 2\sqrt{3}$$

$$r = \frac{AB}{2} = \sqrt{3}$$

Ответ: $H = 2, r = \sqrt{3}$.

3.



Рассмотрим $\triangle SOB$:

$$\angle OSB = \frac{1}{2} \angle CSB = 60^\circ$$

$$\angle SBO = 30^\circ$$

$$OB = \frac{SB}{2} = 6$$

$$SB^2 = SO^2 + OB^2$$

$$SO^2 = SB^2 - OB^2 = 144 - 36 = 108$$

$$SO = 8\sqrt{2}$$

Ответ: $SO = 8\sqrt{2}, OB = 6$.

Тема 9. Начала математического анализа

Задание. Решение задач.

Задание: найти интервалы монотонности функции.

Задание: найти точки экстремумов функции.

1. $y = x^2 - 4x + 7$

5. $y = x(\sqrt{x} - 2)$

9. $y = x^2 - 5x + 3$

13. $y = 2x^4 - x$

2. $y = 1 - x^3 + x^2$

6. $y = x^2 \ln x$

10. $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 1$

14. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

3. $y = x^3 - x$

7. $y = -\frac{1}{4}x^4 - x + 1$

11. $y = \frac{5x}{1+x^2}$

15. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x$

4. $y = \frac{x+2}{x-3}$

8. $y = -\frac{1}{x}$

12. $y = \sin x + \cos x$

16. $y = x \ln x$

Задание: вычислить экстремумы функции.

Задание: найти наибольшее и наименьшее значения функции.

17. $y = x^2 - 5x + 3$

18. $y = 2x^3 - 12x^2 + 18x - 1$

19. $y = \frac{5x}{1+x^2}$

20. $y = \sin x + \cos x$

21. $y = 2x^4 - x$

22. $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x$

23. $y = 3\sqrt[3]{x^2} - x$

24. $y = x \ln x$

25. $y = x^2 - 6x + 13; x \in [0; 6]$

26. $y = 8 - 0.5x^2; x \in [-2; 2]$

27. $y = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3; x \in [1; 3]$

28. $y = 6x^2 - x^3; x \in [-1; 6]$

29. $y = x^3 - 3x^2 - 9x + 35; x \in [-4; 4]$

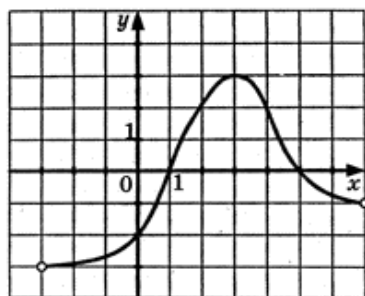
30. $y = -x^3 + 9x^2 - 24x + 10; x \in [0; 3]$

31. $y = x^2 - 4x + 3; x \in [0; 3]$

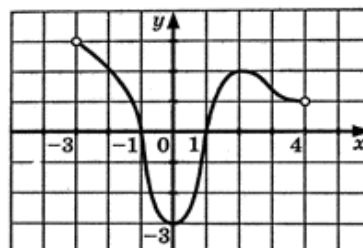
32. $y = x \ln x; x \in [1; e]$

Задание: найти интервалы монотонности и экстремумы функции.

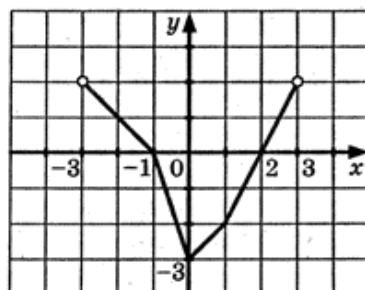
33.



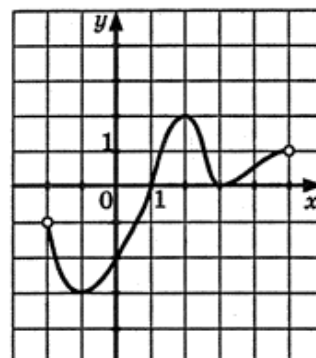
34.



35.



36.



Если производная некоторой функции $f(x)$ больше нуля на интервале $(a; b)$, то эта функция *монотонно возрастает* на интервале $(a; b)$. Если производная некоторой функции $f(x)$ меньше нуля на интервале $(a; b)$, то эта функция *монотонно убывает* на интервале $(a; b)$.

Экстремум функции – максимальное или минимальное значение функции на каком-либо интервале.

Если производная некоторой функции $f(x)$ при переходе через точку 0 меняет свой знак с + на –, то эта точка является *точкой максимума* (локального) этой функции. Если производная некоторой функции $f(x)$ при переходе через точку 0 меняет свой знак с – на +, то эта точка является *точкой минимума* (локального) этой функции.

Рассмотрим решение нескольких примеров:

1. Найти интервалы монотонности функции $y = \frac{x+2}{x-3}$.

$$y' = \frac{(x+2)'(x-3) - (x+2)(x-3)'}{(x-3)^2} = \frac{-5}{(x-3)^2}$$

Так как производная отрицательна на всей области определения, кроме точки $x = 3$, в которой она не существует, то функция монотонно убывает на интервале $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

Ответ: монотонно убывает на интервале $(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$.

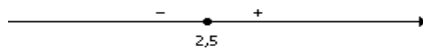
2. Найти точки экстремумов функции $y = x^2 - 5x + 3$.

$$y' = (x^2)' - (5x)' + 3' = 2x - 5$$

Приравняем производную к нулю:

$$2x - 5$$

$$x = 2,5$$



Так как производная меняет знак с – на +, то точка $x = 2,5$ является точкой минимума.

Ответ: $x_{\min} = 2,5$.

3. Вычислить экстремумы функции $y = 2x^4 - x$.

$$y' = (2x^4)' - x' = 8x^3 - 1$$

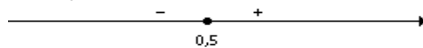
Приравняем производную к нулю:

$$8x^3 - 1 = 0$$

$$8x^3 = 1$$

$$x^3 = \frac{1}{8}$$

$$x = 0,5$$



Так как производная меняет знак с – на +, то точка $x = 0,5$ является точкой минимума. Найдем минимум:

$$y_{\min} = 2(0,5)^4 - 0,5 = -\frac{3}{8}$$

Ответ: $y_{\min} = -\frac{3}{8}$.

4. Вычислить наибольшее и наименьшее значения функции $y = x \ln x$, $x \in [1; e]$.

$$y = x \ln x$$

$$y' = \ln x + 1$$

Приравняем производную к нулю:

$$\ln x + 1 = 0$$

$$\ln x = -1$$

$$x = \frac{1}{e}$$

Точка $x = \frac{1}{e}$ не входит в данный интервал. Найдём значения функции на границах интервала:

$$y(1) = 1 \cdot \ln 1 = 0$$

$$y(e) = e \cdot \ln e = e$$

$$y_{\text{наим}} = 0$$

$$y_{\text{наиб}} = e$$

Ответ: $y_{\text{наим}} = 0$; $y_{\text{наиб}} = e$.

Тема 10. Интеграл и его применение

Задание. Подготовить сообщение по теме «Из истории интегрального исчисления»

Методические рекомендации

При подготовке сообщения (доклада) целесообразно воспользоваться следующими рекомендациями:

- Уясните для себя суть темы, которая вам предложена.
- Подберите необходимую литературу (старайтесь пользоваться несколькими источниками для более полного получения информации).
- Тщательно изучите материал учебника по данной теме, чтобы легче ориентироваться в необходимой вам литературе и не сделать элементарных ошибок.
- Изучите подобранный материал (по возможности работайте карандашом), выделяя самое главное по ходу чтения.
- Составьте план сообщения.

Напишите текст доклада

Рекомендуемая литература:

1. Акимов С. Занимательная математика. – СПб.: Тригон, 1997
2. Глейзер Г.И. История математики в школе: IX-X кл. Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 1983г.
3. Дектярева З.А. Математика после уроков. – Краснодар, 1996
4. Депман И.Я. За страницами учебника математики. – М.: Просвещение, 1989
5. Математика: Школьная энциклопедия. – М.: «Большая Российская энциклопедия», 1996
6. Шеина О.С., Соловьева Г.М. Математика. Занятие школьного кружка. – М.: НЦ ЭНАС, 2001
7. Щербакова Ю.В. Занимательная математика на уроках и внеклассных мероприятиях. – М.: ООО «Глобус», 2008

Задание. Решить задачи.

Вычислить интеграл

$$\int_1^2 2x^2 dx \quad \int_1^5 \frac{7dx}{x} \quad \int_{-2}^4 (8+2x-x^2)dx \quad \int_{-3}^1 (2x^2+3x-1)dx \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} 3 \sin x dx \quad \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x dx$$

Методические рекомендации

Если функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и $F(x)$ – какая-либо ее первообразная на этом отрезке, то справедлива следующая формула:

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

которая называется **формулой Ньютона–Лейбница**.

Разность $F(b) - F(a)$ принято записывать следующим образом:

$$F(b) - F(a) = F(x) \Big|_a^b,$$

где символ $\Big|_a^b$ называется знаком подстановки.

Таким образом, формулу можно записать в виде:

$$\int_a^b f(x) dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a)$$

Нахождение определенных интегралов с помощью формулы Ньютона–Лейбница осуществляется в два этапа: на первом этапе находят некоторую первообразную $F(x)$ для подынтегральной функции $f(x)$; на втором – находится разность $F(b) - F(a)$ значений этой первообразной на концах отрезка $[a, b]$.

Таблица первообразных

Функция	k (постоянная)	x^p , $p \neq -1$	$\frac{1}{x}$	e^x	a^x	$\sin x$	$\cos x$
Первообразная	$kx + C$	$\frac{x^{p+1}}{p+1} + C$	$\ln x + C$	$e^x + C$	$\frac{a^x}{\ln a} + C$	$-\cos x + C$	$\sin x + C$

Правила нахождения первообразных

Пусть $F(x)$ и $G(x)$ – первообразные соответственно функций $f(x)$ и $g(x)$. Тогда:

1. $F(x) \pm G(x)$ – первообразная для $f(x) \pm g(x)$;
2. $a F(x)$ – первообразная для $a f(x)$;
3. $\frac{1}{k} F(kx+b)$ – первообразная для $a f(kx+b)$.

Примеры

Найти все первообразные функции

а) $f(x) = x^4 + 3x^2 + 5$

Решение: Используя таблицу и правила нахождения первообразных, получим:

$$F(x) = \frac{x^5}{5} + 3 \frac{x^3}{3} + 5x + C = \frac{x^5}{5} + x^3 + 5x + C$$

б) $f(x) = \sin(3x - 2)$

Решение:

$$F(x) = \frac{1}{3}(-\cos(3x - 2)) + C = -\frac{1}{3}\cos(3x - 2) + C$$

$$в) f(x) = \frac{1}{7-3x}$$

Решение:

$$F(x) = -\frac{1}{3} \ln |7-3x| + C$$

Пример 1. Вычислить интеграл $\int_1^3 x^2 dx$.

Решение. Для подынтегральной функции $f(x) = x^2$ произвольная первообразная имеет

$$F(x) = \frac{x^3}{3} + \tilde{N}$$

вид $\frac{x^3}{3}$ Так как в формуле Ньютона-Лейбница можно использовать любую первообразную, для вычисления ин-

теграла возьмем первообразную, имеющую наиболее простой вид: $F(x) = \frac{x^3}{3}$.

$$\int_1^3 x^2 dx = \left. \frac{x^3}{3} \right|_1^3 = \frac{3^3}{3} - \frac{1^3}{3} = 9 - \frac{1}{3} = 8\frac{1}{3}$$

Тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx$$

Пример 2. Вычислить интеграл.

Решение. По формуле Ньютона-Лейбница имеем:

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos 2x dx = \left. \frac{1}{2} \sin 2x \right|_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{2} (\sin 2 \cdot \frac{\pi}{4} - \sin 2 \cdot 0) = \frac{1}{2} (\sin \frac{\pi}{2} - \sin 0) = \frac{1}{2} (1 - 0) = \frac{1}{2}$$

Тема 11. Элементы теории вероятностей и математической статистики

Задание. Составление презентации по теме «Из истории возникновения теории вероятностей»

Методические рекомендации

Требования к презентации

На первом слайде размещается:

1. название презентации;
2. автор: ФИО, группа, название учебного учреждения (соавторы указываются в алфавитном порядке); год.
3. На втором слайде указывается содержание работы, которое лучше оформить в виде гиперссылок (для интерактивности презентации).
4. На последнем слайде указывается список используемой литературы в соответствии с требованиями, интернет-ресурсы указываются в последнюю очередь.

Рекомендуемая литература:

1. Акимов С. Занимательная математика. – СПб.: Тригон, 1997
2. Глейзер Г.И. История математики в школе: IX-X кл. Пособие для учителей.- М.: Просвещение, 1983г.
3. Дектярева З.А. Математика после уроков. – Краснодар, 1996
4. Депман И.Я. За страницами учебника математики. – М.: Просвещение, 1989
5. Математика: Школьная энциклопедия. – М.: «Большая Российская энциклопедия», 1996

6. Шеина О.С., Соловьева Г.М. Математика. Занятие школьного кружка. – М.: НЦ ЭНАС, 2001

7. Щербакова Ю.В. Занимательная математика на уроках и внеклассных мероприятиях. – М.: ООО «Глобус», 2008

Задание. Решить задачи.

Задача 1. В классе 21 шестиклассник, среди них два друга: Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Митя и Петя окажутся в одной и той же группе.

Задача 2. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (одним из выстрелов).

Задача 3.

Два завода выпускают одинаковые автомобильные предохранители. Первый завод выпускает 40% предохранителей, второй – 60%. Первый завод выпускает 4% бракованных предохранителей, а второй – 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Задача 4. Две фабрики выпускают одинаковые лампочки. Первая фабрика выпускает 60% лампочек, вторая – 40%. Среди продукции первой фабрики 3% лампочек дефектные, среди продукции второй фабрики – 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине лампочка окажется дефектной.

Задача 5. Две фабрики выпускают одинаковые стекла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стекол, вторая – 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стекол, а вторая – 1%. Найдите вероятность того, что случайно купленное в магазине стекло окажется бракованным.

Задача 6. По отзывам покупателей Иван Иванович оценил надёжность двух интернет-магазинов. Вероятность того, что нужный товар доставят из магазина А, равна 0,8. Вероятность того, что этот товар доставят из магазина Б, равна 0,9. Иван Иванович заказал товар сразу в обоих магазинах. Считая, что интернет-магазины работают независимо друг от друга, найдите вероятность того, что ни один магазин не доставит товар.

Задача 7. В торговом центре два одинаковых автомата продают кофе. Вероятность того, что к концу дня в автомате закончится кофе, равна 0,2. Вероятность того, что кофе закончится в обоих автоматах, равна 0,16. Найдите вероятность того, что к концу дня кофе останется в обоих автоматах.

Задача 8. Биатлонист 4 раза стреляет по мишеням. Вероятность попадания в мишень при одном выстреле равна 0,85. Найдите вероятность того, что биатлонист первые 2 раза попал в мишени, а последние два промахнулся. Результат округлите до сотых.

Задача 9. На экзамене по геометрии школьнику достаётся один вопрос из списка экзаменационных вопросов. Вероятность того, что это вопрос на тему «Вписанная окружность», равна 0,1. Вероятность того, что это вопрос на тему «Тригонометрия», равна 0,35. Вопросов, которые одновременно относятся к этим двум темам, нет. Найдите вероятность того, что на экзамене школьнику достанется вопрос по одной из этих двух тем.

Задача 10. В случайном эксперименте бросают три игральные кости. Найдите вероятность того, что в сумме выпадет 7 очков. Результат округлите до сотых.

Методические рекомендации

Нам потребуется много ознакомительной теории, решение ниже.

1) Вероятность события A – это отношение числа исходов, благоприятствующих его наступлению к числу всех исходов (несовместных, единственно возможных и равновероятных). $P(A) = m/n$, где m – число благоприятных исходов, а n – число всех исходов.

2) Несовместные события - события, которые не наступают в одном и том же испытании.

3) Суммой событий A и B называется событие $C = A+B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B .

4) Теорема: Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий $P(A+B) = P(A)+P(B)$.

5) Два события A и B называются независимыми, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, проявилось другое событие или нет. в противном случае они зависимые.

6) Условная вероятность: Пусть A и B - зависимые события. Условной вероятностью $PA(B)$ события B называется вероятность события B , найденная в предположении, что событие A уже наступило.

7) Теорема: Вероятность произведения двух зависимых событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого, найденного в предположении, что первое событие уже наступило: $P(A*B) = P(A) * PA(B)$.

Задача. В классе 21 шестиклассник, среди них два друга - Митя и Петя. Класс случайным образом делят на три группы, по 7 человек в каждой. Найдите вероятность того, что Митя и Петя окажутся в одной и той же группе.

Решение:

Нас устроит, если Митя и Петя окажутся в любой из трех групп.

Допустим, событие A - оба попали в 1-ю группу

событие B - оба попали во 2-ю группу

событие C - оба попали в 3-ю группу.

Эти события несовместны по определению №2 и любое из них нас устроит. Используем теорему №4 и найдем $P(A+B+C) = P(A)+P(B)+P(C)$.

В свою очередь событие A состоит из двух зависимых событий:

A_1 - что Митя окажется в 1-ой группе

A_2 - что Петя окажется в 1-ой группе, $\Leftrightarrow$ теорема №3: $P(A) = P(A_1)*PA_1(A_2)$.

По определению № 1 находим вероятность, что Митя попадет в 1-ю группу $P(A_1)$: $m=1$, так как один благоприятный исход, а $n=3$, так как всего возможно три исхода. Поэтому $P(A_1) = 1/3$.

Теперь найдем $PA_1(A_2)$ то есть условную вероятность того, что Петя попадет в 1-ю группу при условии, что Митя в нее уже попал.

Заметим, что число благоприятных условий равно 6, так как одно место в группе уже занято Митей (то есть нас устраивает, если Петя попадет в любое из шести свободных мест в группе и $m=6$), а общее число всех исходов = 20, так как Митя уже не участвует в выборке (то есть всего претендентов осталось 20 человек и $n=20$). Поэтому $PA_1(A_2) = 6/20 = 3/10$

Таким образом $P(A) = 1/3 * 3/10 = 1/10$.

Аналогично рассуждая, найдем $P(B) = 1/10$ и $P(C) = 1/10$.

Поэтому $P(A+B+C) = 1/10 + 1/10 + 1/10 = 3/10 = 0,3$ (по теореме №4).

Ответ: 0,3.

Задача. Стрелок стреляет по мишени один раз. В случае промаха стрелок делает второй выстрел по той же мишени. Вероятность попасть в мишень при одном выстреле равна 0,6. Найдите вероятность того, что мишень будет поражена (одним из выстрелов).

Решение:

По условию задачи нас устроит, если произойдет одно из двух несовместных событий:

A - стрелок попадает с 1 раза

B - стрелок попадает со 2 выстрела, а первый выстрел мимо цели.

События A и B несовместны. Напомним некоторые определения:

2) Несовместные события - события, которые не наступают в одном и том же испытании.

3) Суммой событий A и B называется событие $C = A+B$, состоящее в наступлении, по крайней мере, одного из событий A или B .

4) Теорема: Вероятность суммы несовместных событий A и B равна сумме вероятностей этих событий $P(A+B) = P(A) + P(B)$.

Значит, $P(A+B) = P(A) + P(B)$, где $P(A) = 0,6$ по условию. Найдем $P(B)$.

Напомним некоторые определения:

5) Два события A и B называются независимыми, если вероятность появления каждого из них не зависит от того, проявилось другое событие или нет. в противном случае они зависимые.

8) Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

9) Два события называются противоположными, если в данном испытании они несовместны и одно из них обязательно происходит: $P(A) + P(B) = 1$.

Значит, в этой задаче $P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,6 = 0,4$ - вероятность того, что в первый раз стрелок промахнется.

10) Произведением событий B и C называется событие $B=C$, состоящее в том, что в результате испытания произошло и событие B и событие C .

Заметим, что вероятность события C , что стрелок попадет в цель 2-й раз равна 0,6 (так как она не зависит, первый раз стрелок стреляет или второй), то есть $P(C) = 0,6$.

Таким образом, получим $P(B) = P(B \cdot C) = 0,4 \cdot 0,6 = 0,24$.

Значит, $P(A+B) = 0,6 + 0,24 = 0,84$.

Ответ: 0,84.

Задача.

Два завода выпускают одинаковые автомобильные предохранители. Первый завод выпускает 40% предохранителей, второй - 60%. Первый завод выпускает 4% бракованных предохранителей, а второй - 3%. Найдите вероятность того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Решение:

По условию задачи первый завод выпускает 40% предохранителей из 100%. Другими словами он выпускает $40/100 = 4/10$ доли от общего производства двух заводов. Второй завод аналогично выпускает $60\% = 60/100 = 6/10$ доли от общего числа деталей.

Среди этих $4/10$ по условию 4% брака, что значит $4/100$ от $4/10$, это равно: $4/100 \cdot 4/10 = 16/1000$. То есть от всего объема выпущенных деталей $16/1000$ бракованных выпускает первый завод.

Аналогично найдем долю брака со второго завода: $3/100 \cdot 6/10 = 18/1000$.

Всего бракованных деталей с обоих заводов будет: $16/1000 + 18/1000 = 34/1000 = 0,034$. Это и будет равно вероятности того, что случайно выбранный в магазине предохранитель окажется бракованным.

Ответ: 0,34.

Задача. Две фабрики выпускают одинаковые лампочки. Первая фабрика выпускает 60% лампочек, вторая - 40%. Среди продукции первой фабрики 3% лампочек дефектные, среди продукции второй фабрики - 2%. Найдите вероятность того, что случайно купленная в магазине лампочка окажется дефектной.

Решение:

По условию задачи первая фабрика выпускает 60% лампочек из 100%. Другими словами она выпускает $60/100 = 6/10$ доли от общего производства двух фабрик. Вторая ; __ХБ_<фабрика аналогично выпускает $40\% = 40/100 = 4/10$ доли от общего числа лампочек.

Среди этих $6/10$ по условию 3% брака, что значит $3/100$ от $6/10$, это равно: $3/100 \cdot 6/10 = 18/1000$. То есть от всего объема выпущенных лампочек $18/1000$ окажутся дефектными с первой фабрики.

Аналогично найдем долю дефектных лампочек со второй фабрики: $2/100 \cdot 4/10 = 8/1000$.

Всего бракованных лампочек с обеих фабрик будет: $18/1000 + 8/1000 = 26/1000 = 0,026$. Это и будет равно вероятности того, что случайно выбранная в магазине лампочка окажется дефектной.

Ответ: 0,026.

Тема 12. Уравнения и неравенства

Задание. Решение задач.

Задание: решить уравнение.

- | | | | |
|----------------------------|--|---|---|
| 1. $4^{4x-17} = 64$ | 7. $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7} = \left(\frac{8}{5}\right)^{7x-3}$ | 11. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$ | 16. $5^{2x} + 5^{-2x} = 2$ |
| 2. $5^{2x-8} = 25$ | | 12. $\left(\frac{1}{16}\right)^x - 2\left(\frac{1}{4}\right)^x + 1 = 0$ | 17. $6^{2x} + 6^{-2x} = 2$ |
| 3. $0,25^{3x-10} = 4$ | 8. $3^x = 27 \cdot \sqrt[4]{9}$ | 13. $5^{2x-1} + 5^{x+1} = 250$ | 18. $2 \cdot 4^x - 3 \cdot 10^x = 5 \cdot 25^x$ |
| 4. $2^{5x-4} = 16^{x+3}$ | 9. $4^{2x} - 3 \cdot 4^x - 4 = 0$ | 14. $3 \cdot 2^{x+3} - 2^{x+4} = 4$ | 19. $3^{x^2-3x} = 27^{x^2-3x}$ |
| 5. $3^{5x+2} = 81^{x-1}$ | 10. $2^{2x} - 14 \cdot 2^x - 32 = 0$ | 15. $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+2} = 21$ | 20. $17^{x^2-9} = 29^{x^2-9}$ |
| 6. $0,04(0,2)^{x-4} = 5^x$ | | | |

Задание: решить систему уравнений.

- | | | | |
|---|---|--|---|
| 21. $\begin{cases} 2^{x-3y} = 16 \\ 2x + y = 5 \end{cases}$ | 24. $\begin{cases} 3 \cdot 5^x + y = 78 \\ 5^x - 3y = 16 \end{cases}$ | 26. $\begin{cases} 3^x + 3 \cdot 3^y = 54 \\ 4 \cdot 3^x - 3 \cdot 3^y = 81 \end{cases}$ | 29. $\begin{cases} y^2 = 4^x + 2 \\ 2^{x+2} + 2y + 1 = 0 \end{cases}$ |
| 22. $\begin{cases} 64^{x-3y} = 8 \\ 12x + y = 2 \end{cases}$ | 25. $\begin{cases} 2^x - 4 \cdot 2^y = -62 \\ 3 \cdot 2^x + 4 \cdot 2^y = 70 \end{cases}$ | 27. $\begin{cases} 4x + 3 \cdot 4^y = 28 \\ x - y = 1 \end{cases}$ | 30. $\begin{cases} 2^x + 3^y = 12 \\ 2^y + 3^x = 18 \end{cases}$ |
| 23. $\begin{cases} 4 \cdot 11^x + y = 48 \\ 11^x + 4y = 27 \end{cases}$ | | 28. $\begin{cases} 3^x - 4 \cdot 3^y = 69 \\ x - y = 3 \end{cases}$ | |

Задание: решить неравенство.

1. $5^{x-1} < 25$

2. $0,6^{x^2+3x} \geq 1$

3. $\left(\frac{1}{5}\right)^{3-x} < 25$

4. $\left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$

5. $\left(\frac{5}{8}\right)^{3x-7} \leq \left(\frac{8}{5}\right)^{7x-3}$

6. $5^{\frac{x+1}{3}} \geq \frac{1}{\sqrt[3]{5}}$

7. $2^{2x} - 3 \cdot 2^x + 2 \leq 0$

8. $\left(\frac{1}{8}\right)^{x^2+1} > \left(\frac{1}{32}\right)^{2x}$

9. $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{2x-7}{x+1}} \geq \frac{5}{2}$

10. $\left(\frac{1}{7}\right)^{\frac{x}{4-x}} > 49$

11. $5^{x+1} - 5^x < 20$

12. $3^{x+2} - 3^x < 24$

13. $\left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{x^2-13x+39} \geq \left(\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{-3}$

14. $2^{3x-2} + 2^{3x-1} \geq 6$

15. $\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x-1}{3-x}} > 27$

16. $3^{4x^2-7x} < \frac{1}{27}$

17. $\left(\frac{1}{6}\right)^{\frac{x^2-24}{x-6}} \leq 6$

18. $(x-2)^{x^2-1} > 1$

19. $(x-3)^{x^2-9} > 1$

20. $9^{x+1} - 3^{x+2} < 3^x - 3$

Задание: решить систему неравенств.

21. $\begin{cases} 2^{3x-1} \leq 16 \\ x^2 - x - 12 < 0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} \left(\frac{1}{5}\right)^{2x-2} \leq 25^{-2} \\ 5 > x \end{cases}$

23. $\begin{cases} 0,1^{2x-5} < 10 \\ |x| < 5 \end{cases}$

24. $\begin{cases} 0,2^{5x-11} > 5 \\ x^2 > 4 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 3^{x-1} \leq \sqrt{3} \\ 0,2^{3x^2-2} = 0,2^{2x^2+x+4} \end{cases}$

26. $\begin{cases} 2^{x+1} > 4 \\ 7^{3x-10} < 49 \end{cases}$

27. $\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+2,5} > \sqrt{2} \\ 10^{x^2-1} > 1000 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 0,4^{-x+3} < 0,16 \\ 0,1^{x^2+1} > 0,01 \end{cases}$

29. $\begin{cases} \sqrt{5} \cdot 5^{2x-0,5} \geq 1 \\ 0,2^{6-9x} \leq 125 \end{cases}$

30. $\begin{cases} 7^{3x-16} > 49 \\ 5^{7x-12} < 25 \end{cases}$

Задание: решить уравнение.

1. $\log_3(x-3) = 2$
2. $\log_3(x+1) = 4$
3. $\log_4(3x-4) = \log_4(x+1)$
4. $\log_2(5x+4) = \log_2(x+5)$
5. $\log_2(x^2 - 2x + 8) = 4$
6. $\log_4(x^2 + 2x + 49) = 3$
7. $\log_{7x} 2 + \log_{7x} 4 + \log_{7x} 5 = \log_{7x}(x+33)$
8. $\log_{4x} 2 + \log_{4x} 4 + \log_{4x} 6 = \log_{4x}(x+44)$
9. $\log_2(5x-73) - 2 = \log_2 3$
10. $\log_5(9x-124) - 1 = \log_5 4$
11. $\log_3(x-12) = 2$
12. $\log_x 16 - \log_x 2 = 0,5$
13. $\log_2(2x-4) = \log_2(x^2 - 3x + 2)$
14. $3\log_5 2 + 2 - x = \log_5(3^x - 5^{2-x})$
15. $\log_3 x + \log_{\sqrt{3}} x + \log_{\frac{1}{3}} x = 6$
16. $\log_5(x+10) = 2$
17. $\log_x 2 + \log_x 3 = \frac{1}{3}$
18. $\lg(7x-9)^2 + \lg(3x-4)^2 = 2$
19. $\lg(x-1)^3 - 3\lg(x-3) = \lg 8$
20. $\log_3 \log_4 \log_3^2(x-3) = 0$
21. $\log_2 x + \log_8 x = 8$
22. $2\log_x 25 - 3\log_{25} x = 1$
23. $\log_2^2 x + (x-1)\log_2 x = 6 - 2x$
24. $\log_2(2x+1) = \log_2 3 + 1$
25. $\log_3^2 x - \log_3 x - 3 = 3$
26. $\log_5(x-3) = 2x$
27. $\frac{\log_4(2x^2 + x)}{\log_5(2-2x)} = 0$
28. $5^{\log_5 x} + x^{\frac{1}{\log_5 x}} = 15$
29. $(x+1)^{\log_2(x+1)} = 3$
30. $\log_{-2x}(2x^2 - x - 1) = 1$

Задание: решить неравенство.

1. $\log_3(x+28) \geq 3$
2. $\log_{\frac{1}{5}}(x+23) \leq -2$
3. $\log_{\frac{1}{2}}(1-3x) \geq -2$
4. $\log_6(x^2 + x - 14) \geq 1$
5. $\log_{\frac{1}{140}}(2x+19) \geq \log_{\frac{1}{140}}(4x+3)$
6. $\log_{\frac{3}{4}}(2x-5) \geq \log_{\frac{3}{4}} x$
7. $\log_4(x^2 + x + 10) \leq 2$
8. $\log_4 x + \log_4(x-12) \geq 3$
9. $\log_2(3x+4) \geq 1$
10. $\log_4^2 x > 9$
11. $\log_{\frac{1}{2}}(7x-4) \geq -1$
12. $\log_{\frac{\sqrt{x}}{2}}(4x+1) \geq -2$
13. $\log_{\sqrt{3}} x \geq \log_{\frac{1}{3}} 25$
14. $\log_3 x + \log_3(x-24) \geq 4$
15. $\log_4 \frac{9-2x}{x+2} < 0$
16. $\log_{29}(x^2 - 12x - 63) \leq 0$
17. $\log_6(x+8) \geq \log_{8-x}(8-x)$
18. $1 + \frac{1}{\log_{x-1} 4} \leq \frac{1}{\log_{x+8} 4}$
19. $\frac{x^2 + 4x - 5}{\lg(x+2)} \geq 0$
20. $\log_{\frac{1}{3}} \frac{x+4}{x-9} \geq 0$
21. $\frac{2}{\log_2 x + 1} \geq 1$
22. $\log_5(x+13) < \log_5(x+3) + \log_5(x-5)$
23. $\log_{0,2}(x-2) - \log_{0,2}(4-x) < \log_{0,2} \frac{1}{5}$
24. $\frac{\lg(5x^2 - 7x + 3)}{\lg x} > 2$
25. $\log_8\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \log_{\frac{1}{8}}\left(1 - \frac{x}{6}\right) \leq 1$
26. $\log_{x+1}(11x^2 + 8x - 3) > 2$
27. $\left(\log_{\frac{1}{4}} 7 - \log_{\frac{1}{3}} 7\right) \log_3(x-15) \leq 0$
28. $(8-x)(x+4)\log_3(x-1) \leq 0$
29. $\frac{3\lg x - 8}{\lg x - 2} > 4$
30. $\log_{x+3} 6 + \log_{-13-6x} 6 \leq 0$

Уравнения, содержащие неизвестную переменную в показателе степени, называются *показательными уравнениями*.

При решении показательных уравнений используется *условие равенства двух степеней*: две степени равны тогда и только тогда, когда равны основания степеней и их показатели.

$$a_1^{x_1} = a_2^{x_2} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = a_2 \\ x_1 = x_2 \end{cases}$$

Рассмотрим решение нескольких примеров:

1. $3^{5x+2} = 81^{x-1}$

В основе решения данного уравнения лежит условие равенства 2 степеней. Уравняем основания степеней:

$$3^{5x+2} = (3^4)^{x-1}$$

$$3^{5x+2} = 3^{4x-4}$$

$$5x+2 = 4x-4$$

$$x = -6$$

Ответ: -6.

2. $3^{x+1} + 2 \cdot 3^{x+2} = 21$

Так как числовые коэффициенты при x равны, то в основе решения данного уравнения лежит разложение левой части на множители. За скобку выносится общий множитель – степень с наименьшим показателем. Чтобы узнать, что останется в скобке, нужно каждую степень разделить на общий множитель.

$$3^{x+1}(1 + 2 \cdot 3) = 21$$

$$3^{x+1} \cdot 7 = 21$$

$$3^{x+1} = 3$$

$$x+1 = 1$$

$$x = 0$$

Ответ: 0.

3. $3^{2x} - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$

Так как числовые коэффициенты при x не равны, то в основе решения данного уравнения лежит введение новой переменной, позволяющей показательное уравнение заменить квадратным алгебраическим.

$$3^{2x} = (3^x)^2$$

$$(3^x)^2 - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

$$3^x = t$$

$$t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_1 = -1$$

$$t_2 = 3$$

Ответ: 1.

$$3^x = t_1$$

$$3^x = -1$$

$$t_1 \text{ не подходит, так как степень}$$

$$\text{всегда положительна } (a^x > 0)$$

$$3^x = t_2$$

$$3^x = 3$$

$$x = 1$$

$$4. \begin{cases} 3^x - 4 \cdot 3^y = 69 \\ x - y = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ 3^x - 4 \cdot 3^{x-3} = 69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ 3^x - 4 \cdot \frac{3^x}{3^3} = 69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ 3^x \left(1 - \frac{4}{27}\right) = 69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ 3^x \cdot \frac{23}{27} = 69 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ 3^x = 81 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 4 \\ y = 1 \end{cases}$$

Ответ: $(4, 1)$.

Неравенства, содержащие неизвестную переменную в показателе степени, называются *показательными неравенствами*.

В основе решения показательных неравенств лежит свойство *монотонности показательной функции*, которое, в свою очередь, зависит от основания степени:

$$y = a^x, a > 0, a \neq 1, x \in R$$

$$a > 1, \quad y \uparrow \qquad 0 < a < 1, \quad y \downarrow$$

$$\begin{cases} x_2 > x_1 \\ y_2 > y_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2 > x_1 \\ y_2 < y_1 \end{cases}$$

знак неравенства
не меняется

знак неравенства
меняется на противоположный

Рассмотрим решение нескольких примеров:

$$1. \left(\frac{1}{9}\right)^{-3x+1} > \sqrt{3}$$

Для применения свойства монотонности показательной функции нужно обе степени приравнять к одному и тому же основанию.

$$\frac{1}{9} = 3^{-2}$$

$$\sqrt{3} = 3^{\frac{1}{2}}$$

$$(3^{-2})^{-3x+1} > 3^{\frac{1}{2}}$$

К левой части применим свойство «степень степени», т.е. $(a^m)^n = a^{mn}$:

$$3^{6x-2} > 3^{\frac{1}{2}}$$

Так как $a = 3 > 1$ ($y \uparrow$), то основания степени отбрасываются, а знак неравенства не изменяется:

$$6x - 2 > \frac{1}{2}$$

$$6x > \frac{5}{2}$$

$$x > \frac{5}{12}$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{5}{12}; +\infty\right).$$

$$2. 5^{x+1} - 5^x < 20$$

$$5^x \cdot 5 - 5^x < 20$$

$$5^x (5 - 1) < 20$$

$$5^x < 5$$

Так как $a = 5 > 1$ ($y \uparrow$), то основания степени отбрасываются, а знак неравенства не изменяется:

$$x < 1$$

$$x \in (-\infty; 1)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; 1).$$

$$3. (x-2)^{x^2-1} > 1$$

$$(x-2)^{x^2-1} > (x-2)^0$$

Так как переменная находится и в основании, и в показателе степени, то необходимо будет рассматривать 2 случая: выражение в основании степени больше единицы или меньше единицы, но больше нуля.

$$\begin{cases} x^2 - 1 > 0 \\ x - 2 > 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 - 1 < 0 \\ x - 2 < 1 \\ x - 2 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x^2 > 1 \\ x > 3 \end{cases} \quad \begin{cases} x^2 < 1 \\ x < 3 \\ x > 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty) \\ x \in (3; +\infty) \end{cases} \quad \begin{cases} x \in (-1; 1) \\ x \in (2; 3) \end{cases}$$

$$x \in (3; +\infty)$$

У этой системы нет решения.

$$\text{Ответ: } (3; +\infty).$$

$$4. \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{4x+2,5} > \sqrt{2} \\ 10^{x^2-1} > 1000 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2^{-4x-2,5} > 2^{0,5} \\ 10^{x^2-1} > 10^3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4x - 2,5 > 0,5 \\ x^2 - 1 > 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4x < -3 \\ x^2 > 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x < -0,75 \\ x \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty) \end{cases}$$

$$x \in (-\infty; -0,75)$$

$$\text{Ответ: } (-\infty; -0,75).$$

Уравнения, содержащие неизвестную переменную под знаком логарифма, называются *логарифмическими уравнениями*.

Особенностью решения логарифмических уравнений является нахождение ОДЗ, связанное с определением логарифма: $\log_a b = x$, $a^x = b$. ОДЗ: $a > 0$; $a \neq 1$ (если a неизвестно), $b > 0$. При решении логарифмических уравнений нужно рассматривать систему, включающую в себя помимо самого уравнения ОДЗ.

Рассмотрим 3 типа логарифмических уравнений:

- уравнения, содержащие один логарифм; в основе решения лежит определение логарифма;
- уравнения, содержащие два логарифма и более; в основе решения лежит условие равенства логарифмов: $\log_a b = \log_c d \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = d \end{cases}$ (логарифмы равны тогда и только тогда, когда равны их основания и выражения под знаками логарифма);
- уравнения, сводящиеся к квадратным алгебраическим; в основе решения лежит введение новой переменной, позволяющей преобразовать логарифмическое уравнение в квадратное алгебраическое.

Рассмотрим решение нескольких примеров:

1. $\log_3(x+1) = 4$

Это логарифмическое уравнение 1 типа. Используем определение логарифма:

$$\begin{cases} 3^4 = x+1 \\ x+1 > 0 \\ x = 80 \\ x > -1 \end{cases}$$

Так как $80 > -1$, то $x = 80$ является ответом.

Ответ: 80.

2. $\log_2(5x+4) = \log_2(x+5)$

Это логарифмическое уравнение 2 типа. Используем условие равенства логарифмов:

$$\begin{cases} 5x+4 = x+5 \\ 5x+4 > 0 \\ x+5 > 0 \\ 4x = 1 \\ x > -0,8 \\ x > -5 \\ x = 0,25 \\ x > -0,8 \end{cases}$$

Ответ: 0,25.

3. $\log_3^2 x - \log_3 x - 3 = 3$

Это логарифмическое уравнение 3 типа. Переносим все из правой части:

$$\log_3^2 x - \log_3 x - 6 = 0$$

Пусть $t = \log_3 x$. Тогда:

$$t^2 - t - 6 = 0$$

$$t_1 = -2$$

$$t_2 = 3$$

Перейдем к подстановке:

$$\log_3 x = -2$$

$$\log_3 x = 3$$

$$\begin{cases} x = 3^{-2} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 3^3 \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{9} \\ x > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 27 \\ x > 0 \end{cases}$$

Так как два корня удовлетворяют условию ОДЗ, то они оба входят в ответ.

Ответ: $\frac{1}{9}$; 27.

Неравенства, содержащие неизвестную переменную под знаком логарифма, называются *логарифмическими неравенствами*.

В основе решения логарифмических неравенств лежит свойство монотонности логарифмической функции: если основание логарифма > 1 , то функция возрастает (знак неравенства не меняется), а если принадлежит промежутку $(0; 1)$, то функция убывает (знак неравенства меняется на противоположный). При решении логарифмических неравенств нужно рассматривать систему, в которой отражается монотонность и ОДЗ логарифмической функции.

Рассмотрим решение нескольких примеров:

$$1. \log_{\frac{1}{5}}(x+23) \leq -2$$

Для применения свойства монотонности рассмотрим -2 как логарифм с основанием $\frac{1}{5}$:

$$-2 = \log_{\frac{1}{5}} 25$$

$$\begin{cases} \log_{\frac{1}{5}}(x+23) \leq \log_{\frac{1}{5}} 25 \\ x+23 > 0 \end{cases}$$

Так как $\frac{1}{5} \in (0;1)$ (функция убывает), то знак неравенства меняется на противоположный.

$$\begin{cases} x+23 \geq 25 \\ x > -23 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 2 \\ x > -23 \end{cases}$$

$$x \in (2; +\infty)$$

Ответ: $(2; +\infty)$.

$$2. \log_{\frac{1}{140}}(2x+19) \geq \log_{\frac{1}{140}}(4x+3)$$

Так как $\frac{1}{140} \in (0;1)$ (функция убывает), то знак неравенства меняется на противоположный.

Составляем систему, учитывая ОДЗ:

$$\begin{cases} 2x+19 \leq 4x+3 \\ 2x+19 > 0 \\ 4x+3 > 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -2x \leq -16 \\ x > -9.5 \\ x > -0.75 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x \geq 8 \\ x > -0.75 \end{cases}$$

$$x \in [8; +\infty)$$

Ответ: $[8; +\infty)$.

3.Рекомендуемая литература

Основная литература:

1. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник, базовый и углублённый уровни / Ш.А.Алимов, Ю.М.Колягин, М.В.Ткачёва и др. - 8-е изд. - Москва : Просвещение, 2020. - 463 с. : ил. - Текст: непосредственный.
2. Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Геометрия. 10-11 классы: учебник, базовый и углублённый уровни / Л.С.Атанасян, В.Ф.Бутузов и др. - 8-е изд. - Москва : Просвещение, 2020. - 287с. : ил. - (МГУ-школе). - Текст: непосредственный.

Дополнительная литература:

1. Богомолов, Н. В. Математика. Задачи с решениями в 2 т.: учебное пособие для спо / Н. В. Богомолов. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Юрайт, 2016. — 647 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/386520> (дата обращения: 22.09.2020).
2. Дорофеева, А.В. Математика. Сборник задач: учебно-практическое пособие для спо / А.В. Дорофеева. — 2-е изд. — Москва: Юрайт, 2020. — 176 с. — Текст : электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449051> (дата обращения: 22.09.2020).
3. Кремер, Н.Ш. Математика для колледжей: учебное пособие для спо / Н.Ш. Кремер, О.Г. Константинова, М. Н. Фридман; под ред. Н. Ш. Кремера. — 10-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, 2020. — 346 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/458707> (дата обращения: 22.09.2020).
3. Кучер, Т.П. Математика. Тесты: учебное пособие для спо / Т.П. Кучер. — 2-е изд., испр. и доп. — Москва: Юрайт, 2020. — 541 с.— Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/452010> (дата обращения: 22.09.2020).

Электронные образовательные ресурсы:

1. Баврин, И.И. Математика: учебник и практикум для спо / И.И. Баврин. — 2-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, 2020. — 616 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449045> (дата обращения: 22.09.2020).
2. Богомолов, Н.В. Математика: учебник для спо / Н.В. Богомолов, П.И. Самойленко. — 5-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, 2020. — 401 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449006> (дата обращения: 22.09.2020).
3. Дорофеева, А.В. Математика: учебник для спо / А.В. Дорофеева. — 3-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, 2020. — 400 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449047> (дата обращения: 22.09.2020).
4. Математика: учебник для спо / О.В. Татарников [и др.]; под общ. ред. О.В. Татарникова. — Москва: Юрайт, 2019. — 450 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/433901> (дата обращения: 22.09.2020).
5. Математика. Практикум: учебное пособие для спо / О.В. Татарников [и др.]; под общ. ред. О.В. Татарникова. — Москва: Юрайт, 2019. — 285 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/433902> (дата обращения: 22.09.2020).
6. Павлюченко, Ю.В. Математика: учебник и практикум для спо / Ю.В. Павлюченко, Н.Ш. Хассан ; под общей ред. Ю.В. Павлюченко. — 4-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, 2020. — 238 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449041> (дата обращения: 22.09.2020).
7. Седых, И.Ю. Математика: учебник и практикум для спо / И.Ю. Седых, Ю.Б. Гребенщиков, А.Ю. Шевелев. — Москва: Юрайт, 2020. — 443 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/449040> (дата обращения: 22.09.2020).
8. Шипачев, В.С. Математика: учебник и практикум для спо / В.С. Шипачев; под ред. А.Н. Тихонова. — 8-е изд., перераб. и доп. — Москва: Юрайт, 2020. — 447 с. — Текст: электронный // ЭБС Юрайт [сайт]. — URL: <https://urait.ru/bcode/459024> (дата обращения: 22.09.2020).